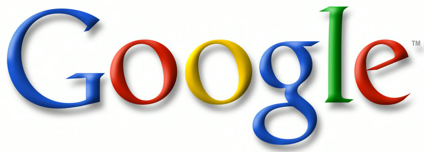
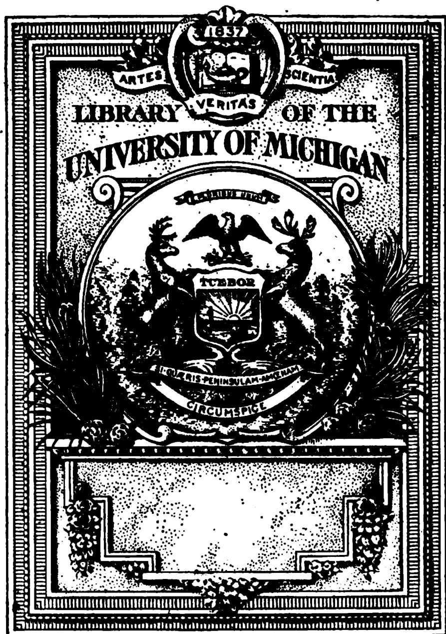
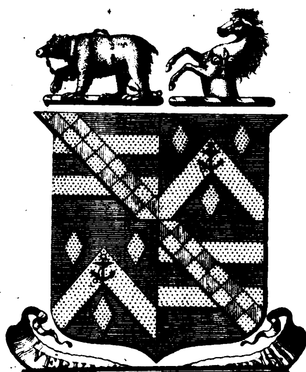

Google


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





[illegible] Lee

[illegible]

[illegible]

[illegible]

purchased at Professor [illegible] [illegible]
[illegible]

LES ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OU
DE LA MESURE
DE L'ETENDUE;

QUI COMPRENNENT LES ELEMENS d'Euclide; les plus belles Propositions d'Archimede touchant le Cercle, la Sphere, le Cylindre & le Cône, avec une idée de l'Analyse, & une Introduction aux Sections Coniques.

Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

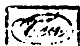
Cinquiéme Edition revuë & augmentée.

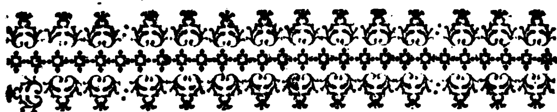


A PARIS,
Chez la Veuve DELAULNE, rue S. Jacques, à l'Empereur.

M. DCC. XXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.





PREFACE.

OU L'ON FAIT VOIR CE QUE c'est que la Geometrie : quelle est son utilité, & quels sont ses Principes.



ANS les Elemens de Mathematique imprimés pour la troisiéme fois en 1704 nous avons consideré les proprietés de de la Grandeur en général. L'étenduë qui est sensible dans les corps, en est une espece. Dans tout corps, ou dans ce qui est étendu, on distingue trois dimensions, la longueur, la largeur, & la profondeur. Ce sont les proprietés de l'étenduë & par consequent des corps, que nous allons examiner; non pas celles des corps sensibles, la dureté, la couleur, le froid, le chaud; mais celles de l'étenduë intelligible, ou du corps entant qu'il est conçû, comme un être qui a trois dimensions, qui est long, large, & profond. Quand il n'y auroit aucun être tel dans le monde, tout ce que nous allons dire des proprietés du corps ainsi consideré, ne laisseroit pas d'être éternellement & immuablement vrai; car ce n'est pas une matiere sujette au changement qui est ici nôtre objet. Il ne s'agit d'aucun corps particulier; mais parceque

c'est pour mesurer la terre qu'on s'est appliqué à étudier les proprietés du corps en général, on donne à ces Elemens le nom de Geometrie, qui s'étend bien plus loin qu'à la mesure de la terre. Comme elle découvre les proprietés de l'étenduë, elle comprend la connoissance de presque toutes les choses qui sont dans le monde, qui est l'assemblage de tous les corps; car ce qui convient au corps intelligible, ou au corps en général, convient à tout ce qui est réellement étendu. Les Astres sont des corps, les Cieux sont étendus. Leur distance de la terre, leur grandeur, leur diametre se mesurent par des lignes, qui peuvent aussi marquer leurs mouvemens; ainsi l'Astronomie ou la science des Astres, les operations, & les raisonnemens des Astronomes sont fondez sur la Geometrie.

La Gnomonique est un art qui trace sur un plan la route du Soleil, en marquant le chemin de l'ombre que fait le sommet du stile du quadran qui represente la terre, autour de laquelle le Soleil tourne; ainsi les operations de cet art sont fondées sur la Geometrie. La Marine dans la plus grande partie de ses pratiques est une dépendance de l'Astronomie. Il est évident que l'Architecture, les Fortifications, les Mechaniques ont pour objet des choses étenduës; par consequent elles sont renfermées dans la science du corps en général. Il n'y a gueres autre chose dans les corps considerez dans leur état naturel, que ce qui est dans le corps mathematique, c'est-à-dire, seulement consideré com-

me étendu. On a sujet de croire que toutes les qualités sensibles du corps naturel ne sont point en lui, mais dans l'ame qui les sent ; on peut donc dire que que toute cette partie de la Philosophie, qu'on nomnomme la Physique, n'est qu'une Geometrie. Je parle de cette partie où il ne s'agit point de l'esprit, ni de son union avec le corps, mais simplement du corps. On ne peut donc être Physicien sans être Geometre. Dans l'Optique, la Dioptrique, la Catoptrique, la Perspective, tout se démontre par lignes ; & généralement dans une bonne Physique on rend raison de tous les effets des corps en montrant que ce sont des suites de leur figure, de leur mouvemens, qui s'expriment par des lignes. En un mot la Geometrie est comme les élemens de toutes les sciences, qui ont pour objet les corps.

Néanmoins ce n'est pas sur cela seul que je fonde l'estime qu'on doit faire de la Geometrie, mais sur ce qu'elle est propre pour former l'esprit, & le rendre exact, étendu & penétrant. Nous avons vû dans la Preface du Traité de la Grandeur, l'importance qu'il y a de s'accoûtumer à considerer les choses abstraites, c'est-à-dire, separées de toute matiere sensible ; & que pour cette raison l'Etude de ce Traité étoit avantageuse, parce que les veritez qu'on y proposoit étant expliquées sans figures, leurs idées se presentoient à l'esprit sans images. On ne peut voir par l'imagination que ce qui est corps ; ceux donc qui ne font usage que de leur imagination, ne peuvent appercevoir les choses spirituelles.

Ils ne croyent pas même qu'il y en ait, parce qu'ils n'en trouvent point d'images dans leur imagination: comme lorsque dans les tenebres on cherche quelque corps avec les mains, si l'on ne rencontre rien qui résiste, on croit qu'il n'y en a aucun.

Il est donc important de s'accoûtumer à voir sans images, & de se convaincre qu'il y a des veritez qui se conçoivent autrement que les corps. Mais il ne faut pas pour cela negliger de cultiver son imagination. On en peut même tirer un grand secours pour concevoir les choses spirituelles; & c'est une nécessité dans l'état où nous nous trouvons, d'y avoir recours. En quitant Dieu nous sommes tombez dans les corps, il faut donc nous y appuyer pour nous relever, comme nous le faisons quand nous sommes tombez par terre. L'ame voit la verité qui lui est présente, & à laquelle elle est attentive: Mais les corps l'attirent vers eux par les impressions qu'ils font sur elle, & lui font perdre de vûë cette verité, à moins qu'elle n'y soit comme attachée par les corps mêmes, qui sont la cause de ses distractions. Ce qui arrive lorsque cette verité est exprimée par des signes sensibles, qui tournent l'ame vers eux, & l'obligent de voir la verité qu'ils marquent. Peu de personnes se peuvent passer de ce secours. Il y a d'habiles gens qui ne voyent rien dans un sujet lorsqu'ils le considerent par les seuls yeux de l'esprit, & qui après l'avoir exprimé sur le papier, apperçoivent tout ce qu'il faut voir pour en juger.

Ainsi après avoir lû le Traité de la Grandeur

en général, & s'y être accoûtumé à concevoir les choses sans images, ce qui est tres-important pour la Religion, il est utile d'apprendre ici comme il faut se servir de son imagination, qui n'est point dangereuse à ceux qui sçavent distinguer ce que l'esprit pur conçoit d'avec ce qu'elle présente. Elle est une source de plusieurs erreurs lorsqu'on ne consulte point la raison; mais aussi il faut avoüer que ceux qui veulent trop s'elever sans s'appuyer sur ce qui est sensible, sont fort sujets à l'illusion, & qu'ils s'égarent souvent dans de vaines pensées. L'ame qui est plus occupée des corps que des choses spirituelles, n'apperçoit qu'à demi celles-ci. Si elle n'est donc réservée dans ses jugemens pour ne prononcer que sur ce qu'elle voit; si ce qu'elle considere n'est extrémement simple, comme sont les choses qui ont fait le sujet du Traité de la Grandeur, elle se trompe facilement. Dans les autres Sciences abstraites l'erreur y est toûjours à craindre. On est obligé de se contenter des vrai-semblances: ce qui n'arrive pas dans celles qui sont aidées de l'imagination, comme la Geometrie, dont les Theorêmes frapent l'esprit trop vivement pour s'y tromper, quand on les considere avec un peu d'attention. La verité ou la fausseté y paroissent trop évidemment, pour être confonduës.

On trouve dans la Geométrie des modeles qui ne peuvent tromper, des démonstrations claires & convaincantes. Elle apprend la methode de conduire l'esprit de veritez en veritez. On y voit des

exemples, comme dans la recherche des Sciences il faut se servir des premieres connoissances qu'on a acquises, ou de celles qui nous sont naturelles, pour aller plus loin. L'art & le secret des Sciences ne consistent qu'à déduire des premieres veritez que Dieu a mises dans nôtre ame, les consequences dont elles renferment les principes, c'est-à-dire, à ménager la Science naturelle; ce que les Geometres font admirablement, comme nous l'allons faire voir, en découvrant en même tems les principes & les fondemens de la Geometrie, ce qui servira de disposition pour la comprendre avec plus de facilité.

*Dans la Geometrie comme dans toutes les autres Sciences on ne se trompe point, quand on raisonne sur des idées claires, qu'on ne dit que ce que l'on conçoit. La Geometrie a cela de particulier, que les principes sur lesquels elle est fondée sont en très-petit nombre. Elle ne parle que de choses simples, faciles à connoître, ou de celles qui en sont des suites nécessaires & évidentes. Les idées de la ligne droite, & des cercles, dont elle s'occupe d'abord, sont claires. Les veritez, sur lesquelles elle s'appuie, sont incontestables, & connues de tout le monde; & c'est à elles qu'on peut réduire tout ce qu'elle entreprend de démontrer. On ne peut ignorer ni contester, qu'*une chose ne peut pas être, & n'être pas dans un même temps; *d'où il s'ensuit que puisque le tout & ses parties prises ensemble ne sont qu'une même chose. il faut que* le tout soit égal à ses parties: *car autrement la même chose seroit*

& ne seroit pas. De ce principe on tire encore cette consequence, qu'il faut que deux grandeurs égales à une même grandeur, soient égales entr'elles; *car ces trois grandeurs ne sont qu'une même chose; ainsi si elles étoient inégales entr'elles, elles seroient & ne seroient pas. On peut de même rapporter à ce principe les quatre Axiomes suivans.*

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, les touts seront égaux.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux.

Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, les touts seront inégaux.

Ces Axiomes sont fondez sur ce que les touts égaux ont des parties égales, & les inégaux des parties inégales. Or si les touts égaux n'avoient pas des parties égales, ils seroient & ne seroient pas.

De ces veritez suivent une infinité d'autres veritez; par exemple, que les moitiés de deux touts égaux sont égales, *ou que* les doubles de ces touts sont égaux, & les tiers de deux touts égaux sont égaux, *où que* les triples de deux touts égaux sont égaux, *ainsi des quarts & des quadruples & d'une infinité de semblables propositions.*

Les veritez suivantes, bien qu'elles soient, pour ainsi dire, grossieres, sont des sources tres-fécondes de plusieurs démonstrations, sçavoir que le tout

eſt plus grand qu'une de ſes parties : *& que* ce qui eſt contenu, *ou* renfermé dans une grandeur, ne peut être plus grand que cette grandeur. *Que* deux grandeurs qui conviennent en tout, lorſqu'on les poſe l'une ſur l'autre, ſont égales.

*C'eſt ſur ce principe, qu'*une choſe ne peut pas être, & n'être pas, *que les Geometres ſe fondent, lorſqu'ils tirent leur preuve de la conſtruction, ou de la ſuppoſition qu'ils ont faite, c'eſt-à-dire, qu'on ne peut pas conteſter leur concluſion, à moins qu'on ne diſe qu'une choſe peut être, & n'être pas en même temps, ce qui eſt abſurde. Car leur concluſion eſt une ſuite ſi naturelle de ce qui a été fait, que ſi cette concluſion ne ſuit pas, il faut que la choſe n'ait pas été faite comme on l'a ſuppoſé.*

Tous ces principes ne ſont dans le fond que celui-ci, qu'on ne ſe trompe point, quand on raiſonne ſur des idées claires; qu'on ne dit que ce que l'on conçoit; mais la difficulté, c'eſt de diſtinguer les idées, qui ſont veritablement claires, & les choſes qui ſe peuvent concevoir. Comme je l'ai dit, celles qui ſont le ſujet de la Geometrie ſont ſimples, aiſées à connoître, à diſtinguer. L'idée du corps eſt claire : les Geometres ne conſiderent que ſes dimenſions, dont la notion eſt tres-claire. Perſonne ne peut ignorer les proprietez générales de l'étenduë, non plus que ces principes généraux, dont nous venons de parler. On ſçait ce que c'eſt que d'être étendu, long, large & profond; & c'eſt le ſeul uſage que les Geometres

ont fait de ces connoissances, qui leur a fait découvrir une infinité de veritez cachées au reste des hommes ; preuve évidente que si on usoit bien des premieres connoissances naturelles, & si on alloit par ordre comme ils font, on feroit d'admirables progrès dans les Sciences. On ne les acquiert que par ce moyen ; c'est pourquoi les premieres études n'étant que pour apprendre comme il faut étudier, il n'y a point de Science plus propre pour les premiers exercices que la Geometrie.

Mais pour cela il faut qu'elle soit traitée avec methode, ce que ne fait Euclide. Il n'a pensé qu'à ranger ses Propositions, de maniere qu'elles se servissent de preuves les unes aux autres ; en quoi il a réussi. La verité se trouve dans ses Elemens ; mais au reste il y a tant de confusion, que bien loin de donner à l'esprit l'idée & le goût du veritable ordre, ils ne peuvent au contraire que l'accoûtumer au désordre & à la confusion, comme s'en plaint Monsieur Nicole dans la Preface des Elemens de Geometrie de Monsieur Arnaud, qui furent imprimez pour la premiere fois en 1667.

C'est dans ces Elemens de Monsieur Arnaud qu'on trouve cet ordre naturel, qui n'est point dans ceux d'Euclide. S'il eut traité des Solides, je n'aurois peut-être jamais pensé à travailler à de nouveaux Elemens. Ce fut pour y suppléer que j'en eus la premiere pensée. Je traite en ceux-ci ce qui regarde les Solides d'une maniere beaucoup plus étenduë que ne fait Euclide & ses Commentateurs ; car j'y

comprends ce qu'Archimede a démontré de plus considerable touchant les Cylindres, les Cones & la Sphere.

J'ai pris à tâche d'expliquer tout Euclide, à la réserve du septiéme, du huitiéme & du neuviéme Livre, qui ne traitent que des nombres, ce qui n'apartient pas à la Geometrie. Je n'ai pas aussi voulu grossir mon Ouvrage de toutes les propositions de son dixiéme Livre, parce qu'on ne le cite gueres; & que ce qui y est d'usage se peut expliquer en peu de pages, comme je croi l'avoir fait. Ses Elemens sont comme la clef commune à presque tous les Livres de Mathematiques. On les cite par tout; ce qui oblige de les sçavoir. Nous n'avons de lui que les propositions qui sont dans ses Elemens: les démonstrations sont de Proclus. Ainsi pour donner un Euclide, il n'est question que de rapporter ses Propositions. L'experience fera voir que le seul ordre que je leur donne, en facilite la démonstration; c'est pourquoi j'espere qu'on apprendra ici Euclide avec beaucoup plus de facilité qu'en aucun de ses Commentateurs; outre que mon Ouvrage est plus court, quoiqu'il contienne plus de choses.

Je le distribuë selon les trois dimensions, qui se distinguent dans le corps, sçavoir la longueur, la largeur, & la profondeur ou solidité. Dans le premier Livre je considere les proprietez de la premiere dimension, me bornant encore à la longueur qui est une ligne, ou droite ou circulaire. Ces lignes étant plus simples & plus faciles à connoître, l'ordre de-

mande qu'on commence par elles, & qu'on réserve à un autre lieu de parler des autres lignes, qui sont plus composées, & qui ont des proprietez plus cachées. Dans le second Livre je traite de la seconde dimension, & je n'y parle pour la même raison que des largeurs ou surfaces qui sont les plus simples; c'est-à-dire, des surfaces droites qu'on nomme plans, qui sont bornées par des lignes droites ou par des cercles. Dans le troisiéme Livre j'applique aux lignes les proprietez de la grandeur en général, qui leur conviennent. Ainsi cette nouvelle Edition ne suppose point absolument qu'on ait vû les Elemens des Mathematiques, ou Traité de la Grandeur en général. Par conséquent on pourra commencer l'étude des Mathematiques par ces Elemens de Geométrie, si on espere y trouver plus de facilité. Dans le quatriéme Livre j'explique ce qui regarde les raisons & les proportions des lignes droites, des cercles, & des surfaces droites, ou des plans. Dans le cinquiéme je traite de la solidité.

Comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit exact & penetrant, à quoi la Méthode, que les Geometres appellent Analyse, est particulierement utile; je tâche dans le sixiéme Livre de donner une idée de cette Méthode, appliquant à la Geometrie ce que j'en ai dit ailleurs par rapport à la Grandeur en général. Je fais voir comment l'on peut porter loin les premieres connoissances de la Geometrie, & en même tems je propose des essais de cette Méthode sur quelques Problêmes.

Je n'ai parlé dans ces Elemens que de la ligne droite & circulaire, & des solides compris sous des surfaces planes ou spheriques, qui se font par le mouvement de ces deux lignes. Mais j'ajoûte à la fin une Introduction aux Sections Coniques, qui servira de premiers Elemens pour les lignes courbes & les solides qu'elles forment.

Ce n'est donc point en retranchant de ces Elemens des choses nécessaires, que je les ai rendu courts; mais en prenant des voyes abregées, par où je mene tout d'un coup à la verité. Je tire mes démonstrations de de la notion de la chose même dont je parle; de sorte qu'avec un peu d'attention à cette notion, on découvre soi-même la démonstration. Il n'y a dans mes Elemens qu'un petit nombre de Theorêmes fondamentaux. Quand on les aura compris, les autres qui n'en sont que des Corollaires, c'est-à-dire, des consequences évidentes, ne seront plus difficiles. Enfin ce qui donnera de la facilité pour entendre & retenir ne qu'on va lire, c'est que toutes les matieres sont rangées sous des chefs qui les lient, & en font un corps de doctrine.

J'ai travaillé de nouveau cet Ouvrage, ayant reconnu qu'il pouvoit servir à former l'esprit & le cœur. C'est Dieu qu'il faut regarder en toutes choses & l'étude de la Geometrie y doit porter. On y trouve de grands sujets de penser à lui. Tout ce qu'on voit de beau dans cette Science touchant les figures, leurs raisons & leurs proportions, se remarque ensuite dans les Ouvrages de la Nature; ce qui donne lieu d'ad-

mirer celui qui en est l'Ouvrier. Il n'y a point de petit corps qui ne soit capable de toutes les figures de Mathematique, selon qu'on concevra que sa matiere sera disposée. Ces figures ont toutes leurs proprietez. L'esprit peut par consequent découvrir en chaque Corps un nombre infini de veritez surprenantes, lorsqu'il le considere avec ordre; c'est-à-dire, s'il fait les considerations que peut faire un habile Geometre, & s'il applique à ce Corps tout ce que la Geometrie enseigne.

Combien d'admirables veritez verrions-nous donc en Dieu, si nous l'étudions autant que nous faisons les corps? Nous n'y voyons presque rien, parce que nôtre esprit ne peut s'appliquer autant de tems à lui, qu'il fait à la matiere. Mais combien de choses les Saints découvrent-ils en sa Divine Essence, qui est la cause de la fécondité de la matiere? Et si la connoissance des veritez que la Geometrie nous enseigne donne tant de contentement, quel est le plaisir des Bien-heureux qui voyent des veritez d'autant plus excellentes, que Dieu surpasse infiniment les Corps.

Ainsi outre le plaisir spirituel que donne la Geometrie, pour insinuer du mépris pour les voluptez, & par-là nous rendre plus propres pour la Morale de l'Evangile, qui est ennemie de ces voluptez: Outre qu'elle dispose l'esprit pour toutes les Sciences, pour celles mêmes qui sont élevées au-dessus de la matiere, dont elle le rend capable, elle nous fait encore connoître qu'elle est la vaste étenduë

de la Science que possedent ceux qui voyent Dieu, & de quel plaisir ils joüissent en découvrant tant de veritez dans la Divine Essence. Par consequent la Geometrie pourroit donner un plus ardent desir de posseder Dieu, que de devenir Geometre, si on l'étudioit avec l'esprit, que je le prie luimême de donner à ceux qui se serviront de mon Ouvrage.



PASSAGE DE PLATON du Livre septiéme de sa République, touchant l'excellence & l'utilité de la Geometrie.

VOUS voyez donc, cher Ami, que les Mathematiques sont nécessaires, puisqu'elles nous obligent *par cette exactitude, dont elles donnent l'habitude*, de faire usage de nôtre esprit. C'est certainement ce qu'elles font ; & c'est une chose remarquable que tous les hommes étant capables par leur nature de raisonner, & de comprendre toutes les Sciences, ceux qui ont moins d'ouverture, s'ils étudient cette Science, quand elle leur seroit inutile pour toute autre chose, ils en retirent cet avantage, que leur esprit devient plus ouvert ; car il n'y a point d'étude qui l'exerce plus, & qui a rende *autant capable d'attention* ; aussi c'est à cette étude qu'il faut appliquer ceux en qui on remarque un esprit qui merite d'être cultivé.

PASSAGE DE PLUTARQUE *du huitiéme Livre des Questions sympostaques, Question seconde.*

PLATON loüe la Geometrie, parce qu'elle détache des sens, ausquels nous nous donnons entierement, & qu'elle nous tourne vers ce qui est intelligible & éternel, dont la connoissance est la fin de la Philosophie, comme la vûë claire des Mysteres est la fin de ceux qui s'y font initier. La volupté & la douleur sont comme un clou, qui attache si fortement l'Ame au Corps, qu'elle en devient dépendante : les choses corporelles lui deviennent ainsi plus claires, parce qu'elle en est plus touchée. Elle ne juge donc point des choses par la lumiere de la raison, mais par les impressions qu'elle reçoit de son corps. La force de la douleur ou des plaisirs, fait qu'elle ne devient sensible qu'à ces perpetuels & divers changemens des choses corporelles qui agissent sur elle ; ainsi elle s'aveugle, & perd cette lumiere infiniment plus précieuse que les yeux du corps, étant seule capable de nous faire appercevoir la nature Divine. La Geometrie est comme un miroir poli, où l'on voit des vestiges & des images des choses intellectuelles, vers lesquelles elle tourne l'esprit, après l'avoir comme purifié & dégagé de la servitude des sens.





TABLE

DES LIVRES, SECTIONS, CHAPITRES, ET PRINCIALES MATIERES.

LIVRE SECOND.

De la seconde espece d'étenduë, qui est la largeur.

Des Surfaces planes.

LIVRE TROISIE'ME.

Les proprietez qui conviennent à toute grandeur, appliquées aux lignes, plans, solides, & démontrées.

LIVRE QUATRIE'ME.

Des raisons & proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtés & circuit, que de leurs surfaces.

LIVRE CINQUIE'ME.

De la troisiéme espece d'étenduë, c'est-à-c des solides; comment les solides se fo ment, & se mesurent.

LIVRE SIXIE'ME.

De la Méthode.

INTRODUCTION

AUX SECTIONS CONIQUES.

FIN DE LA TABLE.

JESUS, MARIA.

Permission du R. P. Superieur Géneral de la Congregation de l'Oratoire de JESUS.

NOUS ABEL Loüis DE SAINTE-MARTHE, Prêtre, Superieur Général de la Congregation de l'Oratoire de N. S. J. C. suivant le Privilege à Nous donné par Lettres Patentes du Roi, en datte du 22. Decembre 1672. signées NOBLET, par lesquelles sont faites défenses à tous Imprimeurs, Libraires & à tous autres, d'imprimer & mettre au jour aucun des Livres composez par ceux de nôtre Congregation, sans nôtre expresse licence par écrit, sous peine de confiscation des Exemplaires, & de mille livres d'amande. Permettons au R. P. LAMY Prêtre de nôtre Congregation, de faire imprimer par tel Imprimeur & Libraire qu'il voudra, *Les Elemens de Geometrie, ou de la Mesure du Corps, qui comprennent tout ce qu'Euclide a enseigné: Les plus belles Propositions d'Archimede & l'Analyse,* qu'il a composez. Fait à S. Paul aux Bois le 24 Juin 1684.

Signé, A. L. SAINTE MARTHE.

APPROBATION.

J'AY lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, ces *Elemens de Geometrie*, composez par le R. P. LAMY Prêtre de l'Oratoire; & j'ay crû qu'une nouvelle Edition de cet Ouvrage ne pouvoit être que tres-utile au progrès des Mathematiques. Fait à Paris le 6. d'Octobre 1709. Signé, SAURIN.

EXPLIC.

EXPLICATION DES TERMES & des Notes dont on ſe doit ſervir.

Axiome.

ON apelle *Axiome* une verité claire & conſtante qu'on connoît ſans étude : dont tout le monde convient.

Demande ou *Propoſition évidente.*

C'eſt une propoſition qui n'eſt pas connuë avant qu'on l'étudie, mais qui le devient auſſitôt qu'on y fait attention ; qu'on a ainſi droit de demander qu'on reçoive comme inconteſtable. J'apelle plus volontiers *Propoſition évidente*, ce qu'on nomme ordinairement, *Demande* ; parceque ce mot n'eſt guéres françois dans le ſens que lui donnent les Geométres.

Définition.

C'eſt une propoſition qui détermine l'idée d'un mot ; ou qui donne une notion diſtincte de la choſe qu'on veut que ce mot ſignifie.

Theorême.

On nomme ainſi une propoſition dont il faut démontrer la verité.

Problême.

C'eſt auſſi une propoſition qu'il faut démontrer ; mais dans laquelle il s'agit de faire quelque choſe, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire.

Lemme,

C'eſt une propoſition qui n'eſt au lieu où elle eſt que pour ſervir de preuves à d'autres qui ſuivent.



Corollaire.

C'est une propoſition qui n'eſt qu'une ſuite d'une autre précedente.

NOTES.

Cette marque + ſignifie *plus*. *A* + *B*, c'eſt *A plus B*.

Celle-ci — ſignifie *moins*. *A* — *B*, c'eſt *A moins B*.

ꝏ C'eſt la marque de l'*égalité*. *C* ꝏ *D* ſignifie que *C* eſt *égal* à *D*. Mais l'on ſe ſert aujourd'hui plus communément de cette marque =. *C* = *D*, ſignifie que *C* eſt *égal* à *D*.

> *Plus grand.*

< *Plus petit.*

× *Par*. C'eſt le ſigne de la multiplication. Comme *A* × *D* ſignifie *A* multiplié par *D*.

s̄. *Supra* ou *ci-deſſus*.

l. *Livre*.

n. *Nombre*. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui ſervent à trouver les propoſitions qu'on alégue. l. 2. n. 6. C'eſt à dire : *Livre ſecond, nombre ſix*. Si l'endroit où l'on renvoie eſt du même livre, on cite le nombre precedent qui eſt à la marge avec cette note s̄. Ainſi s̄ *n*. 5. C'eſt à dire : *Ci-deſſus nombre cinquiéme*.

Prop. Propoſition. Lorſque la propoſition qu'on fait ſe trouve dans Euclide, on marque l'endroit de cette maniere : *Eucl*. I. *prop*. 7. C'eſt à dire : *Euclide livre premier, propoſition ſeptiéme*.

Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir. Afin qu'on s'accoutume à l'uſage de ces notes, je m'en ſers ici en propoſant les verités ſuivantes.

AXIOMES OU VERITEZ claires & connuës.

Premier Axiome.

Le tout est plus grand que sa partie.

Ainsi si A & B sont les parties d'une ligne que je nomme X ou de toute autre grandeur, ce tout X est plus grand que A & que B pris séparément. $X > A$, & $X > B$.

Second Axiome.

Le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Si A & B sont toutes les parties de X, il est évident que $A+B$, c'est à dire A avec B est égal à X : Ce qui s'exprime ainsi $A+B=X$.

Troisiéme Axiome.

Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entr'elles.

Suposé que $A=Z$ & $B=Z$; c'est à dire que A soit égal à Z & que B soit aussi égal à Z, alors A & B sont deux grandeurs égales. On exprime ainsi ce raisonnement : Si $A=Z$ & $B=Z$; ou ce qui est la même chose, si $A=Z=B$: donc $A=B$; je me servirai souvent de cette expression : qu'on y fasse donc attention. On peut joindre à cet Axiome celui-ci qui n'est pas moins évident : Si A est égal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, sera plus grande ou plus petite que A.

Quatriéme Axiome.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, elles demeurent égales, les sommes sont égales.

Si $A=B$, ajoûtant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux $A+X=B+X$.

Cinquiéme Axiome.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si $A=B$, donc $A-X=B-X$; c'est à dire, que si A & B sont deux grandeurs égales, A moins X est égal à B moins X.

Sixiéme Axiome.

Si à des grandeurs inégales on en ajoûte d'égales, elles resteront inégales, l'une plus grande si elle étoit plus grande, ou plus petite si elle étoit plus petite.

Si X & Z sont des grandeurs inégales, & que A & B soient des grandeurs égales, $X+A$ & $Z+B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce qu'ils étoient auparavant.

Septiéme Axiome.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux, l'un plus grand si la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit si la grandeur étoit plus petite.

C'est à dire, que si X & Z sont des grandeurs inégales $X-A$ & $Z-A$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitiéme Axiome.

Une grandeur qui a le signe $+$, étant jointe avec elle-même ou avec son égale qui a le signe $-$, est égale à rien, ou à zero.

c'est à dire, $+A-A=0$.

Neuviéme Axiome.

Les choses qui sont moitié ou tiers &c. d'une même grandeur ou de grandeurs égales, sont égales; mais elles sont inégales, si les grandeurs entieres sont inégales; plus grandes, si les grandeurs entieres sont plus grandes; plus petites, si les grandeurs entieres sont plus petites.

Dixiéme Axiome.

Les grandeurs qui conviennent étant posées les unes sur les autres sont égales.

Si deux lignes posées l'une sur l'autre conviennent, elles sont égales.

On pouroit proposer plusieurs autres semblables Axiomes ; c'est à dire plusieurs autres verités qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dispute point.

AVERTISSEMENT.

On pouroit joindre à ces Axiomes, c'est à dire, à ces verités connûës & incontestables, cette proposition, Qu'une chose est vraïe par sa construction quand elle est faite exactement selon une regle dont on étoit convenu. Ainsi après qu'on est convenu de ce qu'il faut faire pour couper une ligne en deux parties égales, & qu'on a

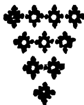
A B C

ainsi coupé A C *au point* B, *alors par la construction* AB *&* BC *sont les moitiés de cette ligne.*

C'est aussi une verité, qu'une proposition est incontestable lorsqu'on ne la peut nier sans dire une chose absurde, c'est à dire qui est manifestement fausse.

On reduit toutes les démonstrations dont on se sert, à ce petit nombre de verités qu'on vient de proposer, & aux notions claires & distinctes des choses dont on doit parler. C'est dans la notion ou l'idée d'une chose qu'on découvre ses proprietés, & qu'on apperçoit ce qu'elle est veritablement ; ainsi toute l'habileté d'un Auteur ne consiste que dans l'art, avec lequel il fait faire attention à l'idée de la chose qui fait le sujet de son livre ; ne proposant d'abord que ce qu'il y a

de plus simple & de plus aisé à connoître dans ce sujet faisant toujours préceder ce qui est nécessaire pour entendre la suite, & sans rien oublier dont la connoissance soit necessaire pour entendre ce qu'il propose. Mais comme l'attention est une chose penible ; & que les démonstrations longues, quoique d'ailleurs claires, sont toujours difficiles, il doit s'accommoder à la foiblesse de l'esprit, & ménager sa capacité. On l'accable lorsqu'on lui présente plusieurs choses à la fois ; il les faut donc partager en toutes leurs parties naturelles, de sorte qu'on les puisse considerer les unes après les autres séparément & avec ordre, ce qui fait qu'on les conçoit & qu'on s'en souvient aisément. C'est ce qu'on a tâché de faire. Les Maîtres le doivent faire remarquer à ceux à qui ils enseigneront ces Elemens. Ils doivent en premier lieu leur en faire considerer le sujet, la distribution de tout l'ouvrage, le soin qu'on prend de donner des idées nettes des choses qu'on veut faire connoître ; & comme c'est de ces idées qu'ordinairement on tire les démonstrations dont on se sert, l'étude de ces Elemens fait avec ces réflexions pourra contribuer à former l'esprit & servira de modéle de la maniere dont il faut étudier & traiter les Sciences ; vûë principale qu'on a ici, comme on l'a dit dans la Préface.





ELEMENS DE GEOMETRIE OU DE LA MESURE DE L'ÉTENDUE.



LIVRE PREMIER.

De la premiere espece d'Etenduë, qui est la Longueur. Des Lignes droites & circulaires.

SECTION PREMIERE.

Des differentes especes d'Etenduë.

DEFINITION I.



Il y a trois especes d'étenduë, la Longueur, la Largeur, & la Profondeur, qui sont les trois dimensions du corps. 1.

L'objet de la Geometrie n'est pas cette éten-

duë materielle des corps, qui ſont effectivement étendus en long, en large, & en profondeur; c'eſt une étenduë intelligible telle que l'eſprit la conçoit; en ſorte que quand il n'y auroit point de corps au monde, ce que les Geometres démontrent de l'étenduë n'en ſeroit pas moins vrai; & c'eſt pour cela que quoique les corps changent, les verités de Geometrie ſont immuables, parcequ'elles ne dépendent point de la matiere, mais des notions claires qui ſont dans l'eſprit. Ainſi quoiqu'il n'y ait point de corps ſans trois dimenſions, on peut conſiderer l'une ſans faire attention à l'autre, la longueur ſans conſiderer la largeur, & la largeur ſans conſiderer la profondeur, comme l'on regarde la longueur des chemins ſans faire reflexion ſur leur largeur, & leur largeur ſans penſer à la profondeur de la terre. La notion de la longueur exclut celle de la largeur & de la profondeur, & celle de la largeur exclut celle de la profondeur; & ces notions ne ſont point fauſſes, quoiqu'effectivement ces trois choſes ſoient inſéparables; parceque dans la maniere dont elles ſont conçuës, elles ſont diſtinguées en ceque l'une eſt conſiderée ſans l'autre. Ainſi les Geometres peuvent ſuppoſer en cette maniere des êtres qui ſoient longs ſans être larges, & qui ſoient larges ſans être profonds ou épais; & quand on voudroit ſoutenir que ces ſuppoſitions ſont entierement fauſſes, les conſéquences qu'on en tire ne pouroient être rejettées comme fauſſes. Car par exemple, bien qu'il n'y ait point de cercle parfait dans le monde, il eſt évident que ſelon qu'on ſuppoſe que le cercle eſt une figure dont la circonference eſt en toutes ſes parties également éloignée du centre, il faut que toutes les lignes

tirées du centre du cercle à la circonference soient égales.

DEFINITION II.

Le point est ce qui n'a aucune partie. 2.

C'est à dire dont on ne considere point les parties ; car tout ce qui est étendu a des parties. Or si le point n'est pas un rien, il est étendu ; ainsi on ne dit qu'il est sans parties, que parcequ'on ne fait point attention à celles qu'il peut avoir, & qu'on le considere comme indivisible.

DEFINITION III.

La ligne, est une longueur sans largeur. 3.

C'est à dire une étendue dont on ne considere point la largeur, ou qu'on suppose n'avoir point de largeur. On peut concevoir que la ligne est la trace, ou l'écoulement d'un point qui se meut, ou qui change de place. Il y a de deux sortes de lignes, la ligne droite, & la ligne courbe.

DEFINITION IV.

La ligne droite est celle qui est la plus courte qui puisse être menée entre deux points donnés. 4.

On peut dire que c'est la trace que laisse un point qui se meut par le plus court chemin.

DEFINITION V.

La ligne courbe est celle qui n'est pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener entre deux points. 5.

Il y a des lignes courbes d'une infinité d'especes ; de regulieres, & d'irregulieres, de Geometriques, & de mechaniques, mais dont on ne parlera point dans ces Elemens. On apelle lignes creuses celles qui sont composées de deux ou de plusieurs lignes, comme *A* & *B*. La ligne *A* faite de deux lignes, & la ligne *B* faite de plusieurs li-



gnes ne peuvent être considerées comme une seule ligne droite. Ainsi pour les distinguer il faut les nommer creuses.

DEFINITION VI.

6. *La Surface, est une étenduë longue & large sans profondeur.*

C'est à dire une étenduë longue & large, dont on ne considere point la profondeur.

DEFINITION VII.

7. *La Surface droite ou plane, est celle qui est la plus courte entre deux lignes droites.*

On peut concevoir qu'une surface droite est faite par le mouvement d'une ligne droite.

DEFINITION VIII.

8. *Surface courbe, celle qui est plus grande entre deux mêmes lignes, qu'une surface droite ou plane.*

DEFINITION IX.

9. *Le Solide, est une étenduë qui a trois dimensions, de la longueur, de la largeur & de la profondeur.*

Le solide est l'écoulement de la surface. Tout solide est un corps; en tant qu'on prend ce nom pour ce qui est étendu, qui a de la longueur, de la largeur, & de la profondeur. Etre étendu, & être corps, c'est la même chose, lorsque l'on ne considere dans les corps que leur extension, & qu'on ne fait aucune attention à leurs qualités sensibles, à la couleur, à l'odeur, & aux autres qualités qu'ils peuvent avoir.



SECTION II.

De la longueur, qui est la premiere & la plus simple dimension du corps.

Des lignes droites.

Propositions évidentes touchant les lignes droites, ou Corollaires de leur définition.

AVERTISSEMENT.

Ces propositions sont renfermées dans l'idée de la ligne droite ; c'est à dire qu'on ne peut concevoir une ligne droite qu'en même tems on n'apperçoive qu'elle n'est pas ce qu'on suppose qu'elle est si ce qu'on va dire n'est pas vrai. Les Geometres supposent toutes ces propositions sans le dire. Je les exprime, parcequ'elles feront que les notions de la ligne droite, d'où l'on doit tirer la démonstration de ses proprietés, seront plus claires. Cet avis est pour toutes les propositions évidentes que je proposerai sur chaque sujet avant les Theorêmes. Il n'y a rien de plus important que d'avoir des notions claires & exactes des choses dont on recherche les proprietés.

PROPOSITION I.

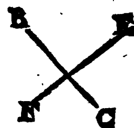
L*Es extrémités d'une ligne sont deux points.*
Les extrémités de la ligne X sont *A* & B 10.
qui sont indivisibles, premierement, quant à leur longueur ; car si *A* avoit deux parties,

par exemple *E* & *F*, ce seroit *F* qui seroit l'extrémité. En second lieu, puisque cette ligne *X* n'a ni largeur ni profondeur, les deux extrémités *A* & *B* n'ont ni largeur ni profondeur, étant donc indivisibles en tous sens, ce sont deux points. * *S n. 2.

PROPOSITION II.

11. *Lorsque deux differentes lignes se coupent, leurs sections est un point indivisible.*

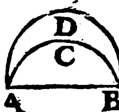
La ligne *EF* coupe *BC*, si elle la coupe en deux differens points, cette ligne *EF* a de la largeur, ce qui est contre la définition de la ligne droite; la section de *BC* & d'*EF* est donc un point.

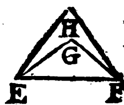


PROPOSITION III.

12. *Une ligne menée entre deux points, laquelle s'écarte d'une part ou de l'autre d'une ligne droite menée entre ces deux mêmes points, est plus grande que cette ligne droite.*

Les lignes courbes *ACB* & *ADB* sont plus grandes que *AB*, & les lignes creuses *EGF* & *EHF* sont plus grandes que *EF*. C'est une suite de la notion de la ligne droite qui est la plus courte qu'on puisse mener entre deux points.





PROPOSITION IV.

13. *Deux points étant donnés, on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre.*

L'instrument dont on se sert pour mener une ligne droite est une regle. Pour connoître si une

regle eſt bonne, on tire avec elle une ligne, à laquelle on l'applique en differens ſens ; & ſi après cela on trouve qu'elle convient toujours avec cette ligne, on juge qu'elle eſt juſte. Un moïen ſûr pour mener une ligne droite eſt de ſe ſervir d'un filet fort ſubtil, comme pourroit être un cheveu ; car après l'avoir tendu entre deux points autant qu'on le peut ſans le rompre, ſelon la notion de la ligne droite, il marquera une ligne droite entre ces deux points.

PROPOSITION V.

Une ligne droite étant donnée, on la peut prolonger. Elle ne peut être prolongée du même côté vers deux differens points. 14.

On prolonge une ligne par le moïen d'une regle.

PROPOSITION VI.

Entre deux mêmes points on ne peut mener qu'une ligne droite. 15.



Si on peut mener pluſieurs lignes droites entre *A* & *B* autres que la ligne *Z*, il faut qu'elles s'écartent ou vers *C* ou vers *D* : ainſi elles ſeront plus longues que *Z*, par conſequent elles ne ſeront pas droites * puiſqu'une ligne entre *A* & *B* ne peut être droite, qu'elle ne ſoit la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener entre ces deux points. On ne peut donc mener qu'une ſeule ligne droite entre *A* & *B*. On pourroit concevoir pluſieurs lignes entre deux points couchées les unes ſur les autres, mais elles ne ſeroient qu'une même ligne. Entre deux mêmes points on peut mener une infinité de differentes lignes courbes. C'eſtpourquoi lorſqu'il s'agit de meſurer la diſtance d'un point à un autre point,

* n. 4.

on ne prend pas pour mesure une ligne courbe, mais une ligne droite.

PROPOSITION VII.

16. *Deux lignes droites qui ont deux points communs ne sont qu'une même ligne droite.*

La ligne BC & la ligne AD ont deux points communs, sçavoir A & B, entre lesquels on ne peut concevoir qu'une ligne droite. Ainsi AB & BA ne sont point deux differentes lignes. La ligne BA étant prolongée ne peut aller ailleurs qu'au même point C, ni AB ailleurs que vers D, lorsqu'on la prolonge; partant AD avec BD ne font qu'une même ligne droite; car entre C & D il n'y a qu'une seule ligne droite.

C A B D

PROPOSITION VIII.

17. *Donc, la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.*

Car si par les deux points donnés A & B l'on mene une ligne droite, elle sera celle que l'on cherche, puisqu'on ne peut mener par deux points plusieurs differentes lignes droites; toutes celles qui ont deux points communs n'étant qu'une même ligne, par la proposition précedente.

PROPOSITION IX.

18. *Deux lignes droites qui se croisent, ou qui se coupent, ne se peuvent rencontrer que dans ce seul point où elles se coupent.*

Car si elles se rencontroient en deux points, elles ne seroient qu'une même ligne par la septiéme proposition; ainsi elles ne seroient pas differentes l'une de l'autre, comme le sont deux lignes qui se croisent & qui se coupent.

PROPOSITION X.

19. *La partie d'une ligne droite, est une ligne droite.*

Qui dit partie d'une ligne droite, ne dit pas ſeulement un point.

SECTION III.

De la ligne qui eſt circulaire.

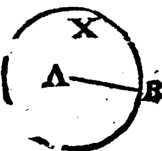
AVERTISSEMENT.

Le nombre des differentes eſpeces de lignes courbes étant infini, je ne conſidere ici que la ligne courbe qui eſt circulaire, laquelle après la ligne droite, eſt la plus ſimple & la plus aiſée à connoitre.

DEFINITION I.

UNe ligne ſur un plan, laquelle n'a ni com- 20.
mencement ni fin, & qui dans toutes ſes parties eſt également éloignée d'un même point, eſt un cercle. Ce point dont toutes les parties de cette ligne ſont également éloignées, s'appelle le centre du cercle.

Concevons que dans la ligne *AB* l'extrémité *A* eſt immobile, pendant que *B* l'autre extrémité tourne; ſi *B* laiſſe une trace, ce ſera un cercle dont toutes les parties ſont éloignées du point *A* d'un intervale égal; ſçavoir *AB*. Ainſi *A* eſt le centre. Cette maniere dont un cercle ſe fait eſt ſi uniforme, qu'on ne peut concevoir aucune difference entre toutes ſes parties.



DEFINITION II.

Le cercle conſideré comme une ſurface, en eſt 21.
une au dedans de laquelle il y a un point également éloigné de ſes bornes.

DEFINITION III.

22. *La ligne qui borne la surface d'un cercle, où le cercle consideré comme ligne s'appelle circonference.*

DEFINITION IV.

23. *Les lignes qui traversent la surface d'un cercle & passent par le centre, s'appelle diametres.*

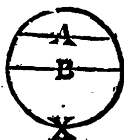
DEFINITION V.

24. *Les lignes qui partent du centre & se terminent à la circonference; se nomment rayons, où demi-diametre.*

AB est un rayon du cercle *X*. [*figure* 5 *n.* 20.]

DEFINITION VI.

25. *Les lignes qui se terminent à la circonference sans passer par le centre, ou qui sont menées d'un point de la circonference à un autre de ses points, se nomment cordes.*



A est une corde du cercle *X*, dont *B* qui passe par le centre est le diametre.

DEFINITION VII.

26. *La partie de la circonference qui se trouve entre les extrémités d'une corde, s'appelle arc.*

℟ Lorsqu'une corde comme est *A* dans le cercle *X*, ne passe pas par le centre, il y a deux portions de circonference, qui se terminent aux extrémités de cette corde, l'une plus grande, l'autre plus petite. Quand on parle de la corde d'un arc, si l'on n'ajoute autre chose, on entend l'arc qui n'est pas le plus grand.

DEFINITION VIII.

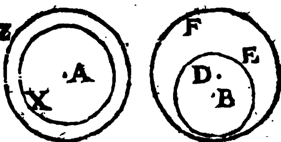
27. *Toute circonference se conçoit divisée en trois cent soixante parties égales, qui se nomment degrés.*

DEFINITION IX.

Chaque degré ſe diviſe en ſoixante minutes, ou petites parties, qu'on appelle premieres. Chaque minute ou premiere en ſoixante ſecondes, & chaque ſeconde en ſoixante tierces : ainſi à l'infini. 28.

DEFINITION X.

Cercles concentriques, ſont ceux qui ſont décrits d'un même centre. Excentriques, qui n'ont pas même centre. 29.



Z & *X* qui ont pour centre le même point *A*, ſont concentriques, & les cercles *E* & *F*, qui ont pour centres *D* & *B* deux points differens, ſont excentriques.

Propoſitions évidentes touchant la ligne circulaire.

AVERTISSEMENT.

Toutes ces propoſitions ſont des conſequences claires de la définition du cercle.

PROPOSITION I.

Un intervale étant donné, on peut décrire une circonference. Eucl. Liv. I. Pr. 2. & 3. Liv. IV. Prop. 1. 30.

L'inſtrument dont on ſe ſert ordinairement pour décrire un cercele, eſt un compas; avec lequel on peut, comme il eſt évident, prendre une ligne égale à une autre ligne donnée; & de deux lignes inégales retrancher de la plus grande une ligne égale à la plus petite. Ce qui fait la deuxiéme & la troiſiéme propoſition du premier d'Euclide, & la premiere du quatriéme.

PROPOSITION II.

31. *Dans un même cercle ou dans les cercles égaux, les arcs égaux ont des cordes égales, & les cordes égales sont les cordes d'arcs égaux.* Eucl. III. Pr. 24.

C'est une suite de la simplicité & uniformité du cercle, toutes ses parties étant faites de même maniere, on ne peut concevoir aucune difference entr'elles.

PROPOSITION III.

32. *Dans les mêmes cercles, ou dans les cercles égaux, les plus grandes cordes soutiennent les plus grands arcs, & les plus grands arcs ont de plus grandes cordes.* Eucl. III. Prop. 28. & 29.

PROPOSITION IV.

33. *Les arcs d'un pareil nombre de degrés sont plus grands dans les plus grands cercles, & plus petits dans les plus petits cercles.*

Cela est évident, car les parties d'un plus grand tout doivent être plus grandes. La centiéme partie d'une toise est plus grande que la centiéme partie d'un pied.

PROPOSITION V.

35. *Les arcs d'un pareil nombre de degrés ont de plus grandes cordes dans les grands cercles, & de plus petites dans les plus petits cercles.*

C'est encore une suite de la simplicité & uniformité du cercle. Tout doit être plus grand dans un plus grand cercle, le diametre, le rayon & la corde de tel & tel degré.

PROPOSITION VI.

34. *Le diametre coupe le cercle en deux parties égales, qui s'appellent demie circonference.*

On ne pouroit concevoir que le cercle fût uniforme en toutes ses parties si cela n'étoit vrai.

PROPOSITION VII.

Toutes les lignes tirées du centre à la circonference étant égales, tous les rayons étant égaux : celles qui sont plus petites que les rayons, ont leur extrémité au dedans du cercle : si elles sont plus longues, elles l'ont au dehors : si égales, dans la circonference même. 36.

Cela est évident, puisque la circonference est en toutes ses parties également éloignée du centre de l'intervale du rayon.

PROPOSITION VIII.

Les cercles sont égaux dont les rayons sont égaux. 37.

C'est la longueur du rayon qui fait que le cercle est plus grand ou plus petit.

PROPOSITION IX.

Deux cercles qui ont un même centre & un même rayon ne sont pas differens. 38.

Comme deux lignes droites entre deux mêmes points ne sont qu'une ligne.

SECTION IV.

De la differente position de deux lignes droites au regard l'une de l'autre.

AVERTISSEMENT.

Deux lignes droites ne peuvent être disposées qu'en ces trois manieres; ou elles se rencontrent ou elles se coupent, ou elles ne se rencontrent point. Quand elles se rencontrent, elles le peuvent faire de sorte, que l'une panche plus vers un côté que vers l'autre, ou qu'elle ne panche pas plus. On considere ici ces trois positions.

DES LIGNES PERPENDICULAIRES.

DEFINITION.

39. *UNe ligne qui tombe ſur une autre ligne, ou qui la coupe de ſorte qu'elle ne panche pas plus vers un côté de cette ligne qu'elle coupe que vers l'autre, s'appelle perpendiculaire.*

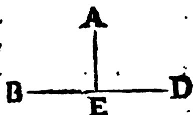
Propoſitions évidentes touchant les lignes perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Je ne fais ces propoſitions que pour rendre plus diſtincte la notion, que la définition précedente vient de donner de la ligne perpendiculaire.

PROPOSITION I.

40. *Une ligne tombant ſur le milieu d'une autre ligne, ſi ſon ſommet eſt également éloigné des extrémités de celle-ci, elle ne panche pas plus d'un côté que d'autre, ainſi elle eſt perpendiculaire.*



AE tombe ſur *E* le milieu de *BD*. Si *A* ſon ſommet eſt également éloigné des extrémités *B* & *D* de la ligne *BD*, elle eſt perpendiculaire ſur *BD*. C'eſt une ſuite de la notion de la ligne perpendiculaire que donne la définition précedente.

PROPOSITION. II.

41. *Si deux points dans une ligne ſont également diſtans des extrémités de la ligne ſur laquelle elle tombe, chaque point de cette premiere ligne ſera également diſtant des mêmes extrémités de la ſeconde ligne.*

Si les deux points *A* & *E* de la ligne *AE* ſont également diſtans de *B* & de *D*, tous les autres

points de *AE* seront également distans de *B* & de *D*. C'est une suite de ce que la position d'une ligne droite ne dépend que de deux points. On ne peut concevoir que quelque point dans la ligne *AE* soit plus près de *B* que de *D*, qu'on ne conçoive que *AE* se courbe en ce point du côté de *B*; & qu'ainsi elle n'est pas une ligne droite, comme on le suppose.

PROPOSITION III.

Dans une perpendiculaire si l'un de ses points est également éloigné de deux autres points de la ligne sur laquelle elle est élevée, tous ses autres points sont également éloignés de ceux-ci. 42.

Si *AE* est perpendiculaire sur BD & que l'un de ses points *A* ou *E* soit également distant de B & de D, l'autre sera également éloigné des mêmes points *B* & *D*. Car si *A* est également distant de *B* & *D*, & que *E* ne le soit pas, alors *AE* panchera plus d'un côté que d'autre; ainsi elle ne sera pas perpendiculaire, contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est.

PROPOSITION IV.

Pour démontrer donc qu'une ligne est perpendiculaire sur une autre, il suffit de faire voir que deux de ses points sont chacun en égale distance de deux points de celle-ci. 43.

Pour démontrer que *AE* est perpendiculaire sur *BD*, il suffit de prouver que ses points *A* & *E* sont chacun également éloignés de B & de D.

PROPOSITION V.

Le prolongement d'une ligne perpendiculaire sur une autre ligne, est une perpendiculaire sur celle-ci. 44.

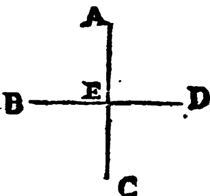
AE est perpendiculaire sur BD; son prolongement EC est perpendiculaire sur BD; car ce n'est qu'une même ligne droite, & l'on ne peut pas

concevoir la chose autrement, à moins que *AC* ne se courbe vers *B* ou vers *D*.

PROPOSITION VI.

45. *Deux lignes sont perpendiculaires l'une sur l'autre, si l'une l'est sur l'autre.*

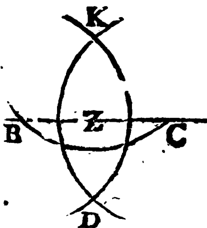
Si *AC* est perpendiculaire sur *BD*, la ligne *BD* est perpendiculaire sur *AC*. On ne peut concevoir que *B* panche plus vers *A* que vers *C*, qu'en même tems on ne conçoive que *D* panche plus vers *C*; & cela étant, *A* panchera plus vers *B* que vers *D*, car cela est réciproque. Ainsi *AE* ne seroit pas perpendiculaire sur *BD* contre la supposition. *BD* est donc perpendiculaire sur *AC*, comme *AC* est perpendiculaire sur *BD*.



PROBLEME I.

46. *D'un point donné hors d'une ligne tirer sur elle une perpendiculaire.* Eucl. I. Prop. 12.

Du point *K* hors de la ligne *Z* il faut tirer une perpendiculaire sur *Z*. 1°. De *K* comme centre je décris l'arc *BC*, ainsi *B* & *C* qui sont dans la circonference de ce cercle & dans la ligne *Z*, sont également éloignés de *K*. 2°. De *C* comme centre & de l'intervale *CK* je décris un cercle, & du point *B* un second du même intervale. Ces deux cercles se coupent aux points *K* & *D* qui sont ainsi également distans de *B* & de *C*. 3°. Par *K* & *D* je

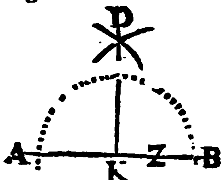


mene une ligne droite, dans laquelle les deux points *K* & *D* étant par la construction également éloignés de *B* & de *C*, il faut comme on l'a dit * que cette ligne *KD* soit perpendiculaire sur *Z*, ce qu'il faloit faire. * § n.43.

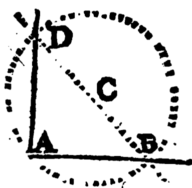
PROBLEME II.

Sur le point donné d'une ligne élever une perpendiculaire. Eucl. I. Prop. 11. 47.

Soit *K* un point dans la ligne *Z*. Il faut élever sur elle au point *K* une perpendiculaire. 1. De *K* comme centre je décris un cercle qui coupe *Z* en deux points, qui sont ici *A* & *B*. 2°. De ces deux points *A* & *B* comme centres, je décris deux autres cercles d'un même intervale pris à discretion, de sorte que ces deux cercles se coupent. Je suppose que ce soit au point *D*. 3. Je mene de ce point *D* une ligne au point *K*, qui est la perpendiculaire que l'on cherche. Car par la construction, *D* est également éloigné de *A* & de *B*, dont le point *K* est aussi également éloigné par la construction; ainsi cette ligne ayant deux de ses points également éloignés de *A* & de *B*, elle est perpendiculaire sur *Z*. * * § n.43.



Lorsque le point donné est sur l'extrémité de la ligne donnée, comme est A, *je prends à discretion le point* C. *&* *ouvrant le compas de l'intervale* AC *je décris un cercle, & je mene le diametre* BD, *& du point de section* D, *je tire une autre ligne au point* A,



qui sera la perpendiculaire qu'on vouloit élever : ce qu'on ne peut démontrer en ce lieu.

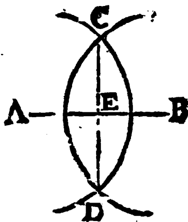
COROLLAIRE.

48. *De-là nous apprenons comment l'on peut couper une ligne en deux parties égales* Eucl. I. Pr. 10.

Soit *AB* une ligne droite ; de *A* & de *B* comme centres, je fais d'un même intervale pris à discretion deux cercles qui se coupent en *C* & *D*, par où je mene une ligne qui est perpendiculaire sur *AB*, * puisque *D* & *C* sont également éloignés de *A* & de *B*. Or le point *E* commun aux deux lignes *DC* & *AB*, est également éloigné de *A* & de *B* *, ainsi *AE* est égal à *EB* ; par consequent la ligne *AB* est coupée par la moitié.

*§ n. 43.

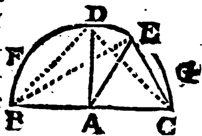
*§ n. 41.



THEOREME I.

49. *On ne peut élever sur un même point dans une ligne plus d'une perpendiculaire.*

AD est perpendiculaire sur la ligne *BC*. Il faut démontrer qu'on ne peut élever sur le point *A* une autre ligne qui soit perpendiculaire : que par exemple *AE* & toute autre ligne ne le peut être.



De *A* comme centre, je décris le cercle *BFDEGC*. Ainsi *B* & *C* sont également distans de *A*. Et *D* où ce cercle coupe la perpendiculaire est également éloigné de *B* & de *C*. * Donc *DB* = *DC*, ainsi les deux arcs *BFD* & *CGD* sont égaux *, par consequent *D* est le milieu de l'arc *BFDEGC*. Si *EA* est perpendiculaire, par les mêmes

*§ n. 42.

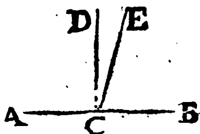
*§ n. 31.

mêmes raisons *BE*=*CE* & *BFDE*=*CGE* ; par consequent *E* est aussi le milieu de *BFD EGC*, ainsi *BFD*=*BFDE* ce qui est absurde.

THEOREME II.

Une ligne tombant perpendiculairement sur le milieu d'une autre ligne, passe par tous les points également éloignés des extrémités de cette autre ligne. 50.

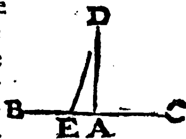
La ligne *CD* tombe perpendiculairement sur *C*, milieu de *AB*. Il faut prouver qu'elle passe par tous les points également éloignés de *A* & *B*, les extrémités de *AB*. Si on le conteste & qu'on veuille dire que le point *E*, par où *CD* ne passe pas, est également éloigné de *A* & de *B*, de ce point soit mené une ligne droite au point *C*, qui sera perpendiculaire sur *AB*, puisqu'en deux de ces points *C* & *E*, elle est également éloignée de *A* & de *B*.* Or il ne se peut faire par le Theorême précedent que sur le point *C*, il y ait deux perpendiculaires, il n'est donc pas vrai que le point *E* soit également éloigné de *A* & de *B*. * § n. 43.



THEOREME III.

On ne peut mener plus d'une perpendiculaire d'un même point sur une même ligne. 51.

La ligne *AD* tombe perpendiculairement sur le milieu de la ligne *BC*, je dis qu'on ne peut du même point *D* mener aucune autre perpendiculaire sur *BC* ; car cette ligne tomberoit de part ou d'autre de *A* ; que ce soit en *E* : Alors le point *E* est également distant de *B* & de *C* :* donc *BE* est moitié de cette ligne. * § n. 42.



Mais *AB* en eſt auſſi la moitié; ainſi *BA*=*BE*; ce qui eſt abſurde. Donc, &c.

THEOREME IV.

52. *Dans un plan deux lignes qui ſont perpendiculaires ſur une troiſiéme, ne ſe peuvent rencontrer.*

Car ſi elles ſe rencontroient ou ſe coupoient, du point de cette rencontre ou ſection il y auroit deux perpendiculaires ſur la même ligne; ce qu'on vient de démontrer impoſſible.

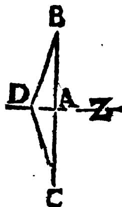
AVERTISSEMENT.

L'on meſure la diſtance d'un point à une ligne par une perpendiculaire, parce que c'eſt la meſure la plus ſimple & la plus conſtante; puiſqu'on ne peut mener d'un point à une ligne qu'une ſeule perpendiculaire, & qu'outre cela elle eſt plus courte que toute autre ligne qu'on puiſſe tirer du même point à la même ligne, comme on le va faire voir dans le Theorême ſuivant.

53. THEOREME V.

La perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on puiſſe mener d'un point à une ligne.

La ligne *BA* eſt perpendiculaire ſur *Z*, il faut démontrer qu'elle eſt la plus courte de toutes les lignes qui puiſſent être menées du point *B* ſur la ligne *Z*.



Prolongez *BA* juſqu'en *C*, en ſorte que *BA* ſoit égal à *AC*; la ligne *DA* eſt perpendiculaire ſur
* § n.45. *BC* comme *BC* l'eſt ſur *AD*.* Le point *D* eſt donc également éloi-
* § n.42. gné de *B* & de *C**, ainſi *BD* eſt égal à *DC*; mais la ligne droite *BC* eſt
* § n.12. plus courte que la ligne *BD*+*DC*.* Par conſequent *AB*, moitié de *BC* eſt plus courte que *BD* moitié de *BD*+*DC* ce qu'il falloit démontrer.

C'est une suite de la nature de la perpendiculaire, qui ne s'écartant point, & s'éloignant également des extrémités de la ligne, sur le milieu de laquelle elle tombe, va par le chemin le plus droit, & par consequent le plus court.

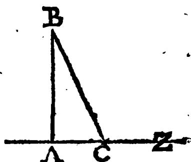
DES LIGNES OBLIQUES.

DEFINITION I.

Les lignes qui panchent plus vers un côté que vers l'autre de la ligne qu'elle rencontre, s'appellent obliques. 54.

DEFINITION II.

B C est une ligne oblique sur Z; aïant mené de B son extrémité, la perpendiculaire AB, la ligne AC entre A, pié de la perpendiculaire, & C le pié de l'oblique, est l'éloignement du perpendicule, & cet éloigement est la mesure de l'obliquité de BC. 55.

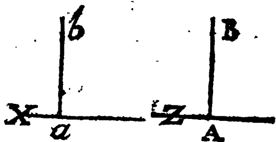


Ainsi une ligne est plus oblique, lorsque son éloignement du perpendicule est plus grand.

LEMME I.

Deux lignes droites, qui ont sur elles chacune une perpendiculaire, étant posées l'une sur l'autre, de sorte que les pieds de ces perpendiculaires soient l'un sur l'autre, ces deux perpendiculaires conviendront. 56.

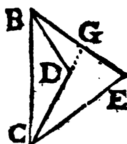
AB est perpendiculaire sur *Z*, & *a b* sur X. Il faut prouver que si l'on pose X sur Z de sorte que *a* soit mis sur *A*, les deux perpendiculaires *AB* & *ab* conviendront. Car puisqu'après cette superposi-



tion, *Z* & *X* ne sont plus qu'une ligne, *AB* sera perpendiculaire sur l'une & sur l'autre, comme aussi *ab*. Donc si *AB*, & *ab* ne convenoient pas, il y auroit deux perpendiculaires sur une même
§ n. 49. ligne au même point ; ce qui est impossible.

LEMME II.

57. *Si des extrémitez d'une ligne l'on en mene quatre autres, dont deux se joignent dans un point plus proche de la ligne donnée que les deux autres, je dis que la somme des deux dernieres sera plus grande que la somme des deux autres.* Eucl. I. prop. 21.



Soit la ligne donnée *BC*, & des points *B* & *C* soient menées les deux lignes *BD*, *CD*, & les deux autres *BE*, *CE*. Je dis que *BE* + *CE* est plus grande que *BD*+*CD*.

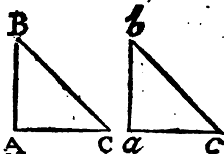
1°. La ligne droite entre deux points étant la
*§ n. 12. plus courte, * *CE* + *EG* est plus grand que *CD* + *DG*, & par la même raison *BG* + *GD* est plus grand que *BD*. Donc *CE* + *EG* + *GD* + *BG* est plus grand que *CD* + *DG* + *BD*. Otant de part & d'autre *DG*, selon l'Axiome 7. le reste *CE* + *FG* + *BG* ou *CE* + *EB* sera plus grand que *BD* + *DC* ; ce qu'il faloi prouver.

THEOREME I.

58. *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dan l'éloignement du perpendicule les lignes obliques sont égales.*

AB est perpendiculaire sur *AC*, & *ab* sur *ac*. Ces deux perpendiculaires sont égales ; comme aussi *AC* éloignement du perpendicule *AB* est égal à *ac* éloignement du perpendicule *ab*

Il faut prouver que *BC*=*bc*.

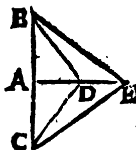


Par le premier Lemme ayant posé *ac* sur *AC* deux lignes égales, la perpendiculaire *ab* conviendra avec la perpendiculaire *AB*, qui étant égales, *b* conviendra avec *B*, & *c* avec *C*; ainsi *bc* avec *BC*; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II.

Les lignes obliques menées du même point à une même ligne sont plus longues, si elles sont plus éloignées de la perpendiculaire. 59.

Il faut prouver que *BE* est plus longue que *BD*. Pour cela soit prolongé *BA* jusqu'à *C*; de sorte que *AB*=*AC*. Alors, * *BD* =*DC* & *BE*=*EC*. Or *BE*+*EC* est plus grande que *BD*+*DC* par le II. Lemme : Donc *BE* moitié de *BE*+*EC* est plus grande que *BD* moitié de *BD*+*DC*, selon l'Axiome neuviéme.



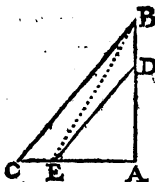
* § n. 58.

THEOREME III.

Une ligne oblique est plus grande, dont la perpendiculaire, & l'éloignement du perpendicule sont plus grands: & si l'éloignement du perpendicule est le même & l'oblique plus grande, la perpendiculaire est plus grande. 60.

Soient 1°. *BC* & *DE* deux lignes obliques, la perpendiculaire *AB* est plus grande que *AD*; & *AC* l'éloignement du perpendicule de *BA* est plus grand que *AE*, celui de *DA*, je dis que l'oblique *BC* est plus grande que l'oblique *DE*. Car par le Theorême précedent *AB* est plus grande que *BE*; & puisque *AC* est perpendi-

culaire sur *AB*, par le même Theorême *BE* est plus grande que *DE* : par consequent *BC* plus grande que *BE*, sera encore plus grande que *DE*.

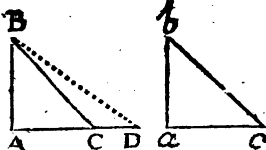


2°. *AE* est le même éloignement, je dis que si *BE* est plus grande que *DE*, la perpendiculaire *AB* est plus grande que la perpendiculaire *AD*. Car si *AD* étoit plus grand que *AB*, ou égal, alors par le précedent Theorême ou par le premier, *BE* seroit plus petit que *DE*, ou égal l'un & l'autre, contre la supposition qu'on fait que *BE* est plus grande.

Theoreme IV.

81. *S'il y a égalité dans la perpendiculaire & dans la ligne oblique, il y a égalité dans l'éloignement du perpendicule.*

Soit *AB*=*ab*, & *BC*=*bc*. Il faut prouver que *AC*=*ac*. Ayant posé *ab* sur *AB*, ces deux lignes égales conviendront entierement ; & par le premier Lemme, la perpendiculaire *ac* conviendra au moins en partie avec la perpendiculaire *AC*. Si *AC*<*ac*, & qu'ainsi *c* ne convient pas avec *C*, mais avec *D*, alors *bc* conviendra avec *BD* ; mais *BD*

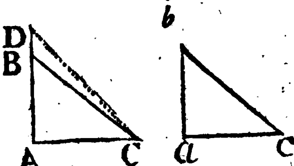


* Th.59. >*BC*, * ce qui est contre ce qu'on suppose *BC* =*bc*. On auroit conclu une égale absurdité, si *AC* avoit été supposée plus grande que *ac*. Partant il faut que *AC*=*ac*, ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME V.

S'il y a égalité dans la ligne oblique, & dans l'éloignement du perpendicule, les perpendiculaires sont égales. 62.

Soit *AC*=*ac*, & *BC*=*bc*. Il faut prouver que *AB*=*ab*. Soit posé *ac* sur *AC*, ces deux lignes égales conviendront, & la perpendiculaire *ab* avec la perpendiculaire *AB*, au moins en partie, par le premier Lemme. * Si l'on dit que *AB* < *ab*, & qu'ainsi *b* convient avec *D*, alors *bc* conviendra avec *DC*, ainsi lui sera égale, & partant *DC* * plus grande que *BC*, à qui on la suppose égale. On auroit aussi conclu une égale absurdité, si *AB* avoit été supposée plus grande que *ab*. Il faut donc que *ab* convienne entierement avec *AB*, & qu'ainsi *AB*=*ab*; ce qu'il falloit prouver.



* § n. 56.

* § n. 59.

DES LIGNES PARALLELES.

DEFINITION.

Deux lignes droites qui sont également distantes l'une de l'autre dans toutes leurs parties, sont dites paralleles. 63.

Propositions évidentes touchant les lignes paralelles.

AVERTISSEMENT.

Ces propositions sont des Corollaires de la Définition des lignes paralleles.

PROPOSITION I.

64. *Une ligne droite qui est egalement éloignée en deux de ses points d'une autre ligne droite, est parallele à cette ligne.*

Car la position d'une ligne droite ne depend que de deux points; ainsi ces deux lignes étant également éloignées l'une de l'autre, elles sont paralleles selon la définition.

PROPOSITION. II.

65. *Les perpendiculaires entre deux paralleles sont égales.*

Ces perpendiculaires sont la mesure de la distance de ces deux paralleles, qui étant par tout la même, sont égales.

PROPOSITION III.

66. *Deux lignes paralleles étant prolongées à l'infini ne se rencontreront point.*

Car elles ne peuvent se rencontrer qu'elles ne s'approchent d'un côté; ainsi elles ne sont plus dans la même distance; par consequent elles ne sont plus paralleles, ainsi qu'on supose.

PROPOSITION IV.

67. *Deux lignes droites qui ne sont pas paralleles, mais qui s'approchent plus d'un côté que d'un autre se rencontrent enfin, si on les prolonge assés.*

Cela est évident.

AVERTISSEMENT.

Cela ne se doit entendre que des lignes droites; car il y a des lignes courbes dont la nature est telle, qu'il y a des lignes droites qui s'en approchent toûjours sans jamais les rencontrer, comme on le démontre; & ces lignes droites s'appellent les Asymptotes de ces courbes.

PROPOSITION V.

68 *Deux lignes qui sont perpendiculaires sur une*

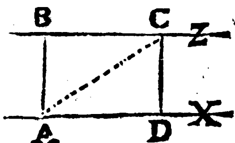
même ligne, sont paralleles entr'elles.

Car ces deux perpendiculaires ne se rencontreront jamais. * Or si elles n'etoient pas paralleles, elles se rencontreroient, selon la Proposition precedente; elles sont donc paralleles. *§ n. 52.

LEMME I.

69. *Entre deux paralleles, les lignes perendiculaires sur l'une le sont sur l'autre*

Si *AB* perpendiculaire sur *X*, ne l'est pas sur *Z*, donc *Z* ne l'est pas sur *AB*; * ainsi étant inclinée sur cette ligne *AB*, elle s'approchera ou d'un côté ou d'autre de la ligne *X*, & la rencontrera: * par consequent elle ne lui est pas parallele contre la supposition qu'on fait qu'elle l'est. *§ n. 45. *§ n. 67.



LEMME II.

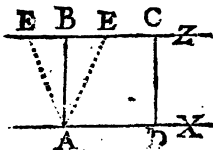
70. *La ligne* A B *ne peut être perpendiculaire sur* Z *&* X, *que ces deux lignes ne soient paralleles.*

Car ces deux lignes (*même figure*) sont réciproquement perpendiculaires sur *AB*; * partant elles sont paralleles. * *§ n. 45. *§ n. 68.

LEMME III.

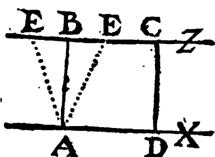
71. *Si entre deux lignes droites, sont deux autres lignes droites égales, dont l'une est perpendiculaire sur la premiere & l'autre sur la seconde, je dis que ces deux premieres lignes sont paralleles.*

Entre *Z* & *X* sont *AB* & *CD* deux lignes égales, dont *AB* est perpendiculaire sur *X* & *CD* sur *Z*, je dis que *Z* & *X* sont paralleles.



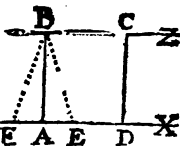
Car si *Z* n'est pas pa-

rallele à *X*, elle s'en éloignera ou s'en approchera, on montrera que l'un & l'autre est absurde; ainsi il faut qu'elles soient paralleles.



1°. Si on suppose qu'elle s'éloigne ayant du point *A*, tiré *A E* per-
* § n. 46. pendiculaire sur *Z*, * alors si cette perpendiculaire convient avec *AB*, *Z* & *X* seront perpendiculaires sur *AB* par la construction & ainsi paral-
* § n. 68. leles entr'elles * contre la supposition. Que si *AE* tombe à côté de *AB*, la perpendiculaire *AE*, sera
* § n. 53. plus courte que l'oblique *AB** : par consequent
* § Axiome 3. aussi plus courte que *CD*=*AB* *, ainsi la ligne *Z* s'approchera de la ligne *X* contre la supposition.

2°. Si on suppose que la ligne *Z* s'approche de la ligne *X*, il y aura une semblable absurdité : car au point *B* ayant élevé sur la ligne *Z* la
* § n. 47. perpendiculaire *BE* *, comme *A B* est perpendiculaire



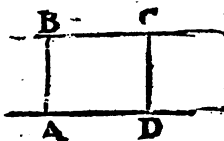
sur X, si elle convient avec *A B* alors, suivant ce qui vient d'être dit, *Z* & *X* seront paralleles; mais si *B E* tombe à côté comme *A B* a été proposée perpendiculaire sur *X*, *B E* sera oblique,
* § n. 51. & par consequent *B E* plus grande que *B A** ou que son égale *C D*; ainsi *Z* & *X* s'éloigneront contre la supposition qui avoit été faite de s'approcher, ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME.

72. *Par un point donné mener une ligne parallele à une ligne donnée.* Eucl. I. Prop. 31.

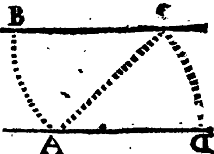
Soit *A B* une ligne à laquelle il faut mener une parallele par le point donné C. De ce point C

j'abaisse une perpendiculaire sur la ligne donnée *A D*, sur laquelle ayant élevé une perpendiculaire telle qu'*AB* égale à *CD*, il est clair que la ligne



qui passera par les deux points *B* & *C* sera parallele à *AD*, suivant la Definition.* * § n. 63.

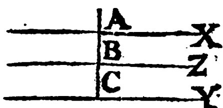
Voici encore une autre maniere. D'un point quelconque A, *soit décrit un Arc de telle ouverture qu'il passe par le point donné* C, *duquel & de la même ouverture* AC *ayant fait l'Arc* AB *égal à* DC, *la ligne menée par les points* B *&* C *sera la parallele requise.*



THEOREME.

Deux lignes paralleles à une troisiéme sont paralleles entr'elles. Eucl. I. Prop. 30. 73.

X & *Y* sont paralleles avec *Z*. De *X* je méne *A B*, perpendiculaire sur *Z*, laquelle étant prolongée jusqu'en *C*, puisqu'elle est perpendiculaire sur *Z*, elle le sera sur *Y*, parallele avec *Z*,* & puisque *Z*, est parallele avec *X*, cette ligne perpendiculaire sur *Z* le sera aussi sur *X* parallele avec *Z*.* Ainsi puisque *X* & *Y* sont perpendiculaires sur *AC*, elles sont paralleles entr'elles,* ce qu'il falloit démontrer. * § n. 69. * § n. 69. * § n. 68.



COROLLAIRE.

On ne sçauroit faire passer par le même point 74.

deux differentes lignes qui soient paralleles à une même.

Car il faudroit par ce Theorême qu'elles fussent paralleles entr'elles, ce qui est absurde, puisqu'elles auroient un point commun, & qu'il est de l'essence des paralleles de ne se rencontrer jamais.

SECTION V.

De la differente position de deux cercles au regard l'un de l'autre.

AVERTISSEMENT.

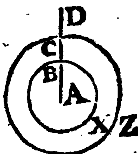
75. *Un cercle peut être posé tellement au regard d'un autre cercle. 1°. Qu'il ne le coupe ni ne le touche point. 2°. Qu'il le coupe ; ou que sans le couper il le touche ou en dedans ou en dehors.*

Propositions évidentes touchant la proposition des cercles.

PROPOSITION I.

LES cercles concentriques ne peuvent ni se couper ni se toucher.

On peut concevoir que les cercles *X* & *Z* concentriques dont *A* est le centre, sont faits par les points *B* & *C* de la même ligne *AD*. Ainsi le cercle que décrira *B* sera toûjours au dedans du cercle *Z* que décrira *C*. Ces deux cercles ne se peuvent donc rencontrer.



PROPOSITION II.

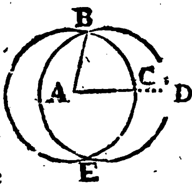
76. *Deux cercles concentriques sont toûjours en même distance.*

Car entre X & Z il y a toûjours la même distance *BC*.

THEOREME I.

Deux cercles qui se coupent ne sont pas concentriques. Eucl. III. Prop. V. 77.

Soient deux cercles qui se coupent aux points *B* & *E*, je dis qu'ils n'ont pas pour centre un même point. Car si *A* est le centre de ces deux cercles qui se coupent au point *B*, les lignes *AB* & *AC* rayons du même cercle sont égales.



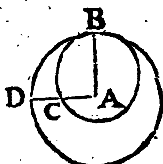
* *AC*=*AB*. Et par la même raison *AB*=*AD*. Ainsi *AC*=*AB*=*AD*; donc *AC*=*AD*. * C'est-à-dire, que la partie est egale au tout, ce qui ne peut pas être. *

* § *n.*20.
* § *Ax.*3.
* § *Ax*1.

THEOREME II.

Deux cercles qui se touchent ne sont pas concentriques, ou n'ont pas même centre. Eucl. III. Prop. 6. 78.

Soient deux cercles qui se touchent au point *B*, je dis qu'ils n'ont point le même centre; car si *A* étoit le centre de ces deux cercles, alors *AD*=*AB* & *AB*=*AC**: par consequent *AD*=*AB*=*AC*; ainsi *AD*=*AC**, c'est-à-dire, que la partie *AC* seroit égale à son tout *AD*, ce qui est absurde.

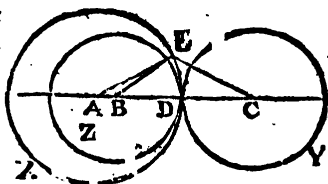


* § *n.*20.
* § *Ax.*3.

THEOREME III.

Si deux ou plusieurs cercles ont leur centre dans une même ligne, qu'ils coupent dans un même point, ils se touchent en ce seul point. 79.

Les cercles *X*, *Z*, *Y*, ont leurs centres dans la même ligne qu'ils coupent au point *D*. Il faut prouver qu'ils se touchent en ce seul point *D*. Si l'on prétend qu'ils se touchent ailleurs, ou qu'ils se rencontrent en E; alors *AE* = *AD*, puisque ce sont les



rayons d'un même cercle. Par la même raison *CD*=*CE*. Partant *AE* + *CE*=*AD* + *CD*,
* § n. 12. ce qui est absurde.* De même on démontre que *Z* & *X* ne se rencontrent point en *E*; car s'ils se rencontroient; *BD*=*BE*, & *AE*=*AD*; mais *AD*=*AB*+*BD*, ou *AB*+*BE*; Donc
* § n. 12. *AE*=*AB*+*BE*, ce qui est absurde.*

COROLLAIRE.

80. *Deux cercles ne se peuvent toucher en dedans ou en dehors qu'en un seul point.* Eucl. III. Prop. 13.

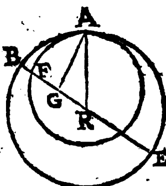
X & *Z* se touchent en dedans, (même figure.) Si c'est au ponit *D*, ils ne se peuvent toucher ailleurs, par exemple au point *E*. S'ils se touchent en *E*; ils ne se peuvent toucher en *D*, car
* § n. 12. *AB*+*BE* seroit égal à *AE*, ce qui est absurde *.
Que *X* & *Y* se touchent en dehors, si c'est au
* § n. 12. point *D*, ils ne se peuvent toucher dans un autre, par exemple en *E*, car alors *AC*=*AE*+*EC*, ce qui est absurde *.

81. THEOREME IV.

Si deux cercles se touchent en dedans, la ligne droite qui joindra leurs centres étant prolon-

gle tombera sur le point d'attouchement de ces deux cercles. Eucl. III. prop. 11.

1°. Par le Theorême II. ces deux cercles n'ont pas un même centre. 2°. Soit *R*, centre de *BAB*: si on veut que *G* le soit de *FAF* qui n'est pas dans la ligne *RA*, qui passe par *A* point de l'attouchement, alors *GA* = *GF* *. Ainsi *RG* + *GA* = *RG* + *GF* *. Or *RG* + *GA* > *RA* *, & par consequent, que *RB* car *RA* = *RB* *. Ainsi *RG* + *GF* > *RB* ou *RG* + *GB*. Otant donc *RG*, partie commune, restera *GF* > que le tout *GB* *, ce qui est impossible.

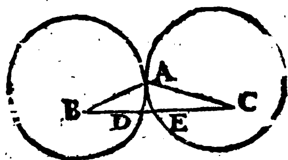


* ſ *n.* 20.
* ſ *Axiome* 4.
* ſ *n.* 12.
* ſ *n.* 20.
* ſ *Axiome* 7.

* THEOREME V. 82.

Si deux cercles se touchent en dehors, une ligne droite menée par leurs centres, passera par le point de leur attouchement. Eucl. III. Prop. 12.

Soient deux cercles *DAD* & *EAE* qui se touchent en *A*. Je dis que la ligne qui joindra leurs centres passera par le point *A*. Si on le nie, on est contraint de dire une chose absurde; car que *B* soit centre de *DAD*, & *C* de *EAE*, & qu'ainsi la ligne *BC* ne passera pas par *A* où ces deux cercles se touchent: *BA* = *BD* & *CA* = *CE* *. Donc *BA* + *AC* = *BD* + *CE*. Puisque *BC* ne passe pas par le point d'attouchement de ces deux cercles qui est commun, *D* & *E* ne sont pas un même point: il y a entre



* ſ *n.* 20.

deux un intervalle sçavoir D E, je l'ajoûte à BD + CE; alors BD + DE + CE est plus grand
* § n. 12. que AB + AC, ce qui est absurde *.

SECTION VI.

De la position d'une ligne droite au regard d'un cercle.

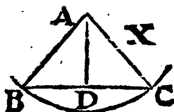
AVERTISSEMENT.

Une ligne droite peut être entierement dans un cercle, ou au dehors. Si elle est dehors, elle le peut quelquefois atteindre, lorsqu'on la prolonge; de sorte qu'elle le coupe ou qu'elle le touche seulement sans y entrer.

83. ### * THEOREME I.

Si en la circonference d'un cercle on prend deux points comme on voudra, la ligne droite menée de l'un à l'autre de ces deux points, tombera dans le cercle. Eucl. III. Prop. 2.

B & C sont deux points dans la circonference du cercle X; il faut prouver que la ligne BC menée entre ces points est entierement dans ce cercle. De A centre de X soit sur D milieu de BC une ligne droite; puisque AB & AC rayons de X sont égaux, & que D est le milieu de BC, cette ligne AD est



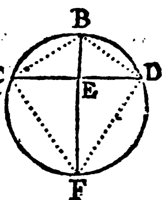
* § n. 36. perpendiculaire *, & partant
* § n. 40 plus courte que AB & AC *.
* § n. 53. Ainsi D est dans le cercle *. Or tout autre ligne oblique menée de A sur BC, sera aussi plus
* § n. 59. courte que A B & AC *. La ligne BC est donc entierement dans le cercle.

THEOREME II.

Si une corde est coupée perpendiculairement en deux parties égales, par une ligne, je dis que cette ligne coupe l'arc du cercle en deux également, & passe par le centre. 84.

Soit la corde *CD* coupée perpendiculairement en deux parties égales par la ligne *BF* au point *E*, je dis que cette ligne coupe l'arc *CD* en deux également en *B*, & passe par le centre du cercle.

1°. Puisque le point *E* est également éloigné des points *C* & *D*, & que *BF* est perpendiculaire sur *CD*, le point *B* qui est dans cette perpendiculaire sera aussi également eloigné des points *C* & *D**, & partant la corde *BC* égale à la corde *BD*, & par consequent l'arc *BC* égal à l'arc *BD**; ainsi l'arc *CBD* est coupé en deux également, la même chose sera pour l'arc *CFD*.



* § n. 42.
* § n. 31.

2°. La perpendiculaire, *BF* passe par tous les points egalement éloignez de *C* & de *D**. Or le centre de ce cercle est également éloigné de ces deux points *C* & *D*; donc *BF* passe par ce centre.

* § n. 42.

COROLLAIRE I.

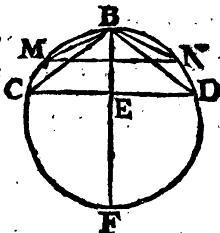
Il est évident que pour couper un arc en deux parties égales, il faut élever sur la moitié de sa corde une perpendiculaire. Eucl. III. Prop. 30. 85.

COROLLAIRE II.

Les deux arcs compris entre deux lignes paralleles sont égaux. 86.

Les deux arcs *MC* & *ND*, compris entre les deux lignes ou cordes paralleles *MN* & *CD* sont égaux; car ayant tiré le diametre *BF* per-

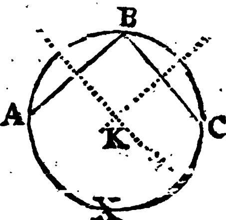
* 3 n.46. pendiculaire sur *CD* *, il
* 3 n.69. le sera aussi sur *MN* *;
ainsi *BM* = *BN* & *BC*
* 3 n.42. = *BD* *. Les arcs de
ces cordes égales seront
* 3 n.31. égaux *. Donc l'arc *BC*
— *BM* = *BD* — *BN*;
mais l'arc *BC* moins
l'arc *BM* est égal à l'arc
CM, & pareillement *BD*
— *BN* = *ND*; donc *CM* = *ND*: ce qu'il falloit démontrer; que si, au lieu de la corde *MN* on avoit supposé en *B* une Tangente parallele à *CD*, on auroit démontré encore plus promptement l'arc *BC* égal à l'arc *BD*.



PROBLEME I.

87. *Trois points étant donnez trouver le centre d'un cercle qui passe par ces points.* Euclid. III. Prop. I.

Soient trois points donnez *A*, *B*, *C*. On les joindra par deux droites *AB*, *BC*, que l'on regardera comme les cordes du cercle cherché; & menant deux perpendiculaires sur le milieu de ces deux lignes, je dis que le point *K* où ces deux lignes se coupent, est le centre du cercle que l'on demande: ce qui est évident par le Theorême precedent.



Si les trois points donnez étoient dans une ligne droite, la question auroit été impossible, comme il est évident; car alors les deux perpendiculaires ne se couperoient pas étant paralleles.

COROLLAIRE I.

Deux cercles ne peuvent avoir trois points communs, comme A, B, C, *qu'ils ne les ayent tous.* 88.

Ces deux cercles ayant un même centre, sçavoir K, & étant décrits d'un même intervalle, ils ne peuvent être qu'un même cercle. * * § n. 38.

COROLLAIRE II.

Deux cercles ne se peuvent couper en plus de deux points. Eucl. III. Prop. 10. 89.

Car s'ils se coupoient en trois, ils auroient trois points communs; ainsi par le Corollaire précedent ce ne seroit pas deux differens cercles.

COROLLAIRE III.

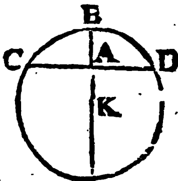
Une portion de cercle étant donnée, on peut achever le cercle. Eucl. III. Prop. 25. 90.

Marquez trois points dans cette portion, après quoi vous pouvez trouver le centre du cercle dont elle est partie par le Problême précedent.

THEOREME III.

Si une ligne coupe la corde ou l'arc d'un cercle en deux parties égales, & passe par le centre, je dis qu'elle la coupe perpendiculairement. Eucl. III. Prop. 3. 91.

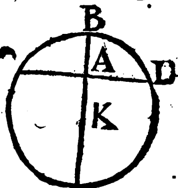
Soit la ligne *BK*, qui coupe l'arc, ou la corde d'un cercle, en deux parties égales & passe par le centre *K*; je dis qu'elle coupe cette corde perpendiculairement; car il y a dans cette ligne *BK* deux points, sçavoir *A* ou *B*, & *K* également éloignez de *C* & de *D*, puisque *A* est la moitié de la ligne *CD*, & *B* moitié de l'arc *CBD*, & que *K* est le centre. Donc *BK* est perpendiculaire. * * § n. 40.



THEOREME IV.

92. *Si une ligne coupe perpendiculairemeet la corde d'un cercle. & passe par le centre, je dis qu'elle la coupe en deux parties égales.* Eucl. III. Prop. 3.

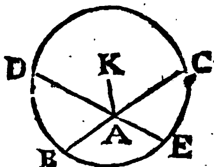
La ligne *BK* passe par le centre *K*, & est perpendiculaire sur *CD*; je dis qu'elle coupe *CD* par la moitié. Le centre est également éloigné de *C* & de *D*, & *BK* étant perpendiculaire, le point *A* & tous les autres de *BK* doivent être également éloignez de *C* &
* § n.42. de *D* *. Donc $AC = AD$; ainsi *CD* est coupé par la moitié.



THEOREME V.

93. *Deux cordes qui ne passent pas par le centre ne se peuvent couper par le milieu.* Eucl. III. Prop. 4.

Soient deux cordes *DE*, *BC*, qui se coupent au point *A*, autre le centre du cercle; je dis qu'elles ne se coupent pas en parties égales. Si ces deux cordes se coupent en *A*, qui n'est pas le centre, & que ce point soit le milieu de ces deux lignes, ayant mené de *A* une ligne au centre *K*, cette ligne *KA* sera perpendiculaire sur *BC* &
* § n.91. sur *DE* *. Donc *BC* & *DE* seront perpendicu-
* § n.45. laires sur *KA* *; ainsi sur le même point *A* il y
* § n.42. a deux perpendiculaires, ce qui est impossible *.



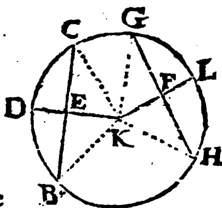
THEOREME VI.

94. *Les cordes qui sont également éloignées du cen-*

tre sont égales, & si elles sont égales, leurs distances du centre sont égales.* Eucl. III. Prop. 14.

Soient les cordes *BC*, & *GH* également éloignées du centre *K*; je dis qu'elles sont égales; & si elles sont égales, leurs distances *KE* & *KF* du centre sont égales.

1°. Je méne sur ces cordes les perpendiculaires *DK* & *KL* qui les coupent par le milieu. * Par l'hipothese *KE* = *KF*, & puisque *BK* = *KH* & *KC* = *KG*: donc l'obliqoe *KB* étant égale à l'oblique *KH*, & les perpendiculaires *KE* & *KF* de ces obliques étant égales, les éloignemens du perpendicule *BE* & *HF* seront égaux*. Par la même voye on prouve que *EC* = *FG*; qu'ainsi *BC* = *HG*; ce qu'il falloit prouver.



* § n. 92.

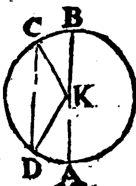
* § n. 61.

2°. On a montré que les obliques comme *KB* & *KH* étant égales, & les distances *BE* & *HF* du perpendicule étant égales, les perpendiculaires *KE* & *KF* sont égales.*. * § n. 62.

THEOREME VII.

65. *De toutes les lignes qui sont dans le cercle, le diametre ou la ligne qui passe par le centre est la plus grande.* Eucl. III. Prop. 15.

Soit la ligne *AB* le diametre, il faut prouver qu'il est plus grand que *CD*, ou que quelqu'autre ligne que ce soit qui ne puisse passer par le centre: ce qui est évident. Car *KC* = *KB*, & *KD* = *KA*; ainsi *BA* = *KC* + *KD*. Or *KC* + *KD* est

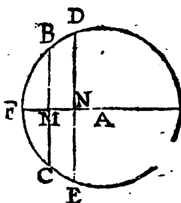


* 3 n. 12. plus grand que *CD** ; donc *BA* eſt plus grand que *CD*.

THEOREME VIII.

96. *Les cordes les plus proches du centre du cercle ſont les plus grandes, & les plus grandes ſont les plus proches du centre du cercle.* Euclid. III. Prop. 15.

A ſoit le centre d'un cercle, & les lignes propoſées ſoient *BC*, & *DE*. Il faut prouver que *DE* qui eſt plus proche du centre *A*, eſt plus grande que *BC* qui en eſt plus éloignée.



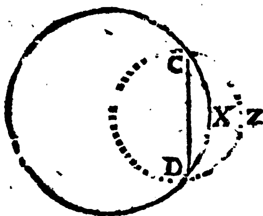
La diſtance de *BC* eſt *AM*, & celle de *DE* eſt *AN*, laquelle diſtance eſt plus petite. Il faut prouver que *DE* qui eſt plus proche du centre eſt plus grande que *BC*, qui en eſt plus éloignée, ce qui eſt évident ; car l'arc *EFD* eſt plus grand que l'arc *CFB* : Or les plus grands arcs ont de plus gran-
* 3 n. 32. des cordes*. Donc *DE* corde *EFD* eſt plus grande que *BC* corde de *CFB*. C'eſt ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IX.

97. *Si une ligne eſt la corde commune de deux arcs de cercles inégaux qui ſe coupent, je dis que l'arc du petit cercle contient plus de degrez que l'arc du grand.*

Soient deux cercles inégaux *X* & *Z* qui ſe coupent aux points *C* & *D*, la corde *CD* leur eſt commune. Je dis que l'arc *CZD* du petit cercle contient plus de degrez que l'arc *CXD* du grand. Car ſi les deux arcs dont *CD* eſt la corde étoient les mêmes, qu'ils fuſſent par

exemple également de dix degrez, il ne seroit pas vray, comme on en est convenu, * que les arcs d'un pareil nombre de degrez ont de plus grandes cordes dans les plus grands cercles. * § n. 33.



COROLLAIRE.

98. *Donc une même ligne ne peut être la corde de deux arcs d'un pareil nombre de degrez, qui soient portions de cercles inégaux.*

AVERTISSEMENT.

Il a été observé § n. 26. qu'on considere toûjours le plus petit arc de chaque cercle, à moins qu'il ne soit expliqué autrement.

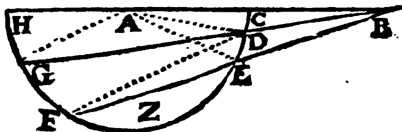
THEOREME X.

99. *Si d'un point pris hors d'un cercle, on mene plusieurs lignes qui le traversent & se terminent à la circonference, je dis 1°. De toutes celles qui tomberont sur la partie convexe, celle qui passera par le centre étant prolongée, sera la plus courte. Celles ensuite qui seront plus près d'elle, seront plus courtes que les plus éloignées. 2°. C'est le contraire dans les lignes qui tombent sur la partie concave.* Eucl. III. Prop. 8.

Soit le point *B*, duquel on ait mené les lignes *BH*, *BG*, *BF*; je dis 1°. Que *BC* qui passe par le centre est plus courte que toute autre menée du même point, par exemple que *BD*. Car *AC*=*AD*: Or *AC*+*CB* est plus courte que *AD*+*DB* *. Donc *BC* sera plus courte que *BD* *. *AD*=*AE*. Or *AD*+*DB* est plus

* § n. 12.
* § Ax. 8.

* § n. 57. court que *A E* + *E B.* * Donc retranchant les grandeurs égales *AD* & *A E*, le reste *D B* sera
* § Ax. 7. plus court que le reste *B E* *.



2°. Que *BH* qui passe par le centre est la plus grande ; car *AB* + *AH* = *AB* + *AG*. Or
* § n. 12. *A B* + *A G* est plus grand que *B G* *. Donc *B H* est plus grand que *B G*. Il est pareillement évident que *B D* + *D F* est plus grand que
* § n. 11. *B F* *. Or *D G*. est plus grand que *DF* *. Donc
* § n. 96. *B D* + *D G* est plus grand que *B F*.

COROLLAIRE.

100. *S'il y a deux lignes droites égales ou inégales posées l'une sur l'autre, & convenantes par un point d'une de leurs extrémités, sur lequel l'une ou l'autre tourne circulairement, en s'écartant, la ligne qui joindra leurs autres extrémités deviendra toûjours plus grande jusques à ce que ces deux lignes ne fassent qu'une seule ligne droite.*

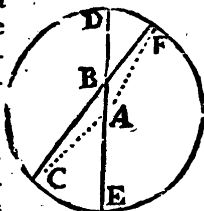
Soient deux lignes *AB*, *AC*, sur *AB* figure précedente, dont *AC* tournera circulairement sur l'extrémité *A*, en s'écartant de *AB*, passant par *D*, *E*, *F*. Les lignes comme *B D*, *B E*, *B F*, &c. qui joignent leurs extrémités deviennent toûjours plus grandes, jusques à ce que lesdites deux lignes forment la seule droite *BAH*, c'est ce qui vient d'être prouvé.

THEOREME XI.

101. *Si d'un point pris hors le centre du cercle, on mene*

mene des lignes à la circonference, je dis que celle qui passera par le centre sera la plus grande, & le reste de ce diametre sera le plus court. Eucl. III. Prop. 7.

Soit le point *B*, & soient menées par ce point les lignes *BE* qui passe par le centre *A*, *BC*, *BF*, *BD*; je dis que *BE* est la plus grande, & sa partie *BD* la plus courte de celles qui peuvent être terminées à ce point.



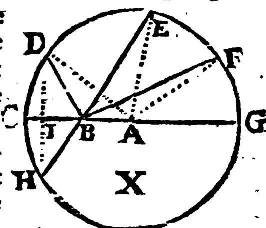
1°. $BA + AE = BA + AC$, puisque $AE = AC$. Or $AB + AC > BC$*. Donc *BE* égal à $BA + AC$, est plus grand que *BC*. *§ n. 12.

2°. $AF = AB + BD$. Or $AB + BF$ est $> AF$*; ôtant donc *AB* partie commune, le reste *BF* sera plus grand que le reste *BD**. *§ n. 12. *§ Axiome 7.

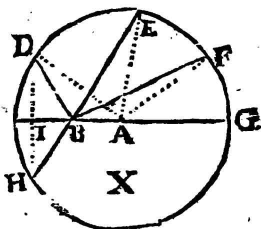
THEOREME XII.

102. *De tous les points qui sont dans le cercle hors le centre, on ne peut mener à la circonference plus de deux lignes qui soient égales.* Eucl. III. Prop. 9.

Soit *A* le centre du cercle *X*, le point *B* ne l'est donc pas. Je dis 1°. Que *BD* est plus grande que *BC**. 2°. Que *BE* est plus grande que *BD*; car *AD* & *AE* sont toûjours le rayon de *X*, qui en tournant & s'éloignant de *AB*, doit faire *BE* plus grande que *BD**, & pareilment *BF* est plus grande que *BE*. Or *BG* est plus grande que *BF**. Par consequent dans tou- *§ n. 101. *§ n. 100. *§ n. 101.



re la partie CDFG du cercle X, toutes les lignes menées de B à la circonference de X sont toutes inégales.



Prenant l'arc CH égal à CD, puisque AC est rayon, il coupera DH perpendiculairement * & en deux parties égales au point I *; ainsi y ayant égalité de perpendicule & de son éloignement, les obliques BH, BD seront égales *; mais toute autre ligne que BH sera ou plus petite ou plus grande, comme on vient de le voir. On peut démontrer de la même maniere que de part & d'autre de C, on peut mener deux lignes égales, & non davantage.

* § n. 91.
* § n. 42.
* § n. 58.

COROLLAIRE I.

103. *Il n'y a donc que le seul centre du cercle d'où l'on puisse tirer à la circonference plus de deux lignes égales.*

COROLLAIRE II.

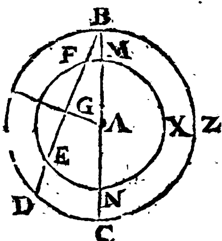
104. *Tout point dans le cercle dont on peut tirer à la circonference trois lignes égales, est le centre du cercle.* Euclid. III. Prop. 9.

THEOREME XIII.

105. *Une ligne traversant deux cercles concentriques, soit qu'elle passe par le centre ou qu'elle n'y passe pas, les parties de chacune de ces lignes interceptées entre les deux circonferences sont égales entr'elles.*

Soient BC, BD qui traversent deux cercles concentriques; je dis que BM=NC, & BF

$= ED$. 1°. Pour BC qui passe par le centre, cela a été prouvé *. * § n. 76.

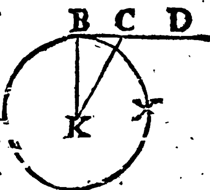


2°. De A menant une perpendiculaire sur BD, alors $GD = GB$ & $GE = GF$ *. Donc $GD - GE = GB - FG$ *. Or $GD - GE = DE$ & $GB - GF = FB$; donc $DE = BF$. * § n. 92. * § Axiome 5.

THEOREME XIV.

Une ligne perpendiculaire à l'extremité d'un rayon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un seul point. Eucl. III. Prop. 16. & 18. 106.

BD est perpendiculaire sur BK, il faut prouver que cette ligne ne touche le cercle X qu'au point B.



Si on dit qu'elle le touche dans un second point, comme en C, je mene de K à C une ligne, laquelle n'est pas perpendiculaire sur BD, puisque de K sur BD on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire *. Elle est donc plus grande que le rayon BK, qui est perpendiculaire sur BD * ; partant le point C est hors le cercle X : ainsi BD ne le touche pas en ces deux points B & C, mais seulement en B. * § n. 52. * § n. 53.

COROLLAIRE.

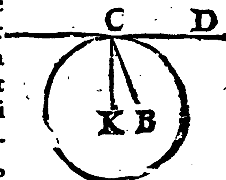
Il ne peut y avoir qu'une seule ligne qui touche le cercle dans un même point. 107.

Deux differentes lignes ne peuvent toucher le cercle X au même point B ; car par ce Theorême, elles seroient toutes deux perpendiculaires sur BK ; ce qui est impossible *. * § n 49

108. THEOREME XV.

Si au dedans d'un cercle on tire une ligne qui ſoit perpendiculaire ſur le point de l'attouchement de la tangente ou touchante, cette perpendiculaire paſſera par le centre de ce cercle. Euclid. III. Prop. 19.

CD eſt une tangente ou touchante : de *C* point d'attouchement, je méne au dedans du cerle une perpendiculaire, je dis qu'elle paſſe par le centre *K* ; ſi on veut que ce ſoit par *B* qui n'eſt pas le centre, je prouve qu'on n'a pas raiſon ; car de *C* ayant mené le rayon *KC*, & élevé au point *C* une perpendiculaire qui

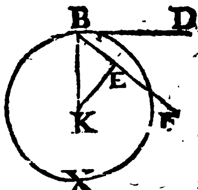


§ n.106. ſera tangente, mais elle ſera la même que *CD*, puiſqu'au point *C* il n'y
§ n.107. peut avoir qu'une ſeule Tangente : Ainſi ſur la ligne *CD* au même point il y auroit deux
*§ n.51. perpendiculaires *CK* & *CB*, ce qui implique*.

THEOREME XVI.

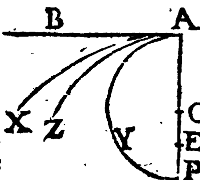
109. *Entre une tangente & la circonference d'un cercle, on ne peut mener aucune ligne droite, mais on peut mener un nombre infini de lignes circulaires.* Eucl. III. Prop. 16.

Si entre *B D* tangente & le cercle *X*, on peut mener quelque ligne droite qui partage l'eſpace entre la tangente *BD* & le cercle, que ce ſoit la ligne *BF*, ſur laquelle je méne du point *K* une autre ligne qui lui ſoit perpendiculaire, ſçavoir *KE*, qui ſera plus courte que



le rayon BK, qui n'est pas perpendiculaire sur cette ligne * ; ainsi KE étant plus petite que le rayon BK, son extrémité E est au dedans du cercle. Par consequent la ligne BF n'est pas hors du cercle, ainsi elle ne partage pas l'espace qui est entre lui & la tangente BD. *§ n. 53.

Mais entre la tangente AB & le cercle Y, on peut faire passer une infinité de cercles; car ayant prolongé le rayon AC au de-là du centre C, & de E comme centre, & de l'intervalle EA ayant fait le cercle Z, la ligne AB sera tangente à ce cercle, * lequel étant plus grand, sera au dehors du cercle Y. Pareillement le cercle X, dont le centre est P, sera encore entre AB & Y, ainsi à l'infini. Par conséquent entre la tangente AB & le cercle Y on peut faire passer une infinité de lignes circulaires. *§ n. 106.



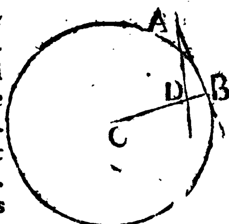
COROLLAIRE.

110. *Il est évident que l'espace compris entre la tangente & la circonference d'un cercle se peut donc diviser en une infinité de parties.*

THEOREME XVII.

111. *D'un point hors le cercle on ne peut mener au cercle d'un même côté plus d'une tangente.* Toute autre ligne le coupera, ou ne l'atteindra pas.

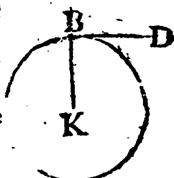
Soit A un point donné hors le cercle. La ligne AB le touche au point B. Je dis que de A vers B on ne peut point mener une autre tangente, que toute autre ligne le coupera, ou ne le touchera pas. Car 1°. Si elle est au delà de AB, elle ne touchera pas le cercle. 2°. Si



elle passe par *B*, ce n'est pas une autre ligne que *AB*. 3°. Si elle passe au dessous de *B* par le point *D*; puisque $CB > CD$, le point
* § n.36. D sera dans le cercle*. Donc *AD* entre dans le cercle, & le coupe.

PROBLEME II.

112. *Mener une ligne droite qui touche un cercle dans un point donné.*

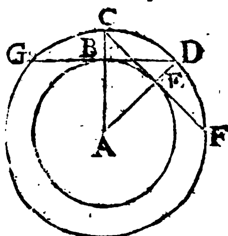


Le centre est *K*, le point donné *B*, je méne le rayon *K B*, & sur son extrémité
* § n.47. *B**, j'éleve perpendiculairement *BD* qui sera la tangente
* § n.106. qu'il falloit faire*.

PROBLEME III.

113. *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente.* Eucl. III. Prop. 17.

Le cercle est *BEB*, le point donné est *C*, duquel je méne une ligne au centre *A* & au point *B*, où cette ligne coupe le cercle, par le Problême précédent je fais la tangente *GD*. Je décris un cercle concentrique par *C*, & de *D* où ce cercle est coupé par la tangente *GD*, je prens *DF* égale à *DC*, je joins *C* & *F* par une ligne qui sera la tangente.



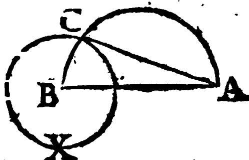
Par la construction, la corde $GD = CF$, car

l'arc *GC* est égal à l'arc *CD* *, & l'arc *CD* à l'arc * § n. 92.
DF ; ainsi les arcs *GD* & *CF* étant égaux, leurs
cordes sont égales *. * § n. 31.

Je méne de *D* au centre *A* la ligne *AD* qui
sera perpendiculaire sur *CF*, puisque deux de
ses points, sçavoir *A* & *D* sont également éloi-
gnez de ses extrémitez : Or puisque les cordes
DG & *CF* sont égales, les lignes *AB* & *AE*
sont égales *. Donc le point *E* aussi-bien que *B* * § n. 94.
est dans la circonference du cercle *BEB*, ainsi la
ligne *CF* étant perpendiculaire sur *E*, extrémité
du rayon *AE*, elle touche le cercle *. * § n. 106.

AVERTISSEMENT.

114. *Ce Problême se pratique plus facilement ainsi ; soit* A *le point donné, duquel il faut mener une tangente au cercle* X ; *Aprés avoir tiré la ligne* AB *de* A *à* B *centre du cercle* X, *il faut décrire sur cette ligne le cercle* ABC, *&*



au point de section C *mener* AC *qui sera la tangente qu'on cherchoit ; ce que l'on ne peut pas démontrer en ce lieu.*





ELEMENS DE GEOMETRIE, OU DE LA MESURE DE L'ETENDUE.



LIVRE SECOND.

De la ſeconde eſpece d'Etenduë, qui eſt la Largeur. Des Surfaces planes.

SECTION PREMIERE.

Des Angles, ou Surfaces qui ſont entre deux lignes, qui ſe rencontrent indirectement.

AVERTISSEMENT.

En parlant ici des Surfaces, nous ne conſiderons que les planes, c'eſt-à-dire celles qui ſont

les plus courtes entre deux lignes droites, commençant par celles qui sont renfermées entre deux lignes, qui se rencontrent ou qui se coupent dans un point.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

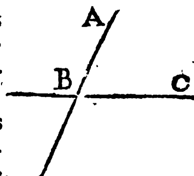


L'Angle est l'ouverture de deux lignes, qui se rencontrent indirectement. 1.

Deux lignes qui se rencontrent directement, ne font qu'une même ligne.

DEFINITION II.

On appelle sommet de l'Angle, le point de rencontre des deux lignes qui le forment, comme le point B; *& ces deux lignes sont appellées les côtez, ou les jambes de l'Angle.* 2.



Ainsi *AB* & *BC* sont les côtez ou les jambes; lorsqu'on marque un Angle avec trois lettres comme *ABC*, celle du milieu B marque le sommet, & les deux autres *A* & *C*, ses côtez.

DEFINITION III.

On nomme Angle plan, celui qui est fait sur un plan. 3.

DEFINITION IV.

Il y a trois sortes d'Angles considerez par rapport à leurs côtez. Le rectiligne, le curviligne, 4.



& le mixtiligne. Le rectiligne est celui qui est formé par la rencontre de deux lignes droites, comme C*; le curviligne est celui qui est formé par la rencontre de deux lignes courbes, comme* A*; le mixtiligne est celui qui est formé par la rencontre d'une ligne droite, & d'une courbe, comme* B.

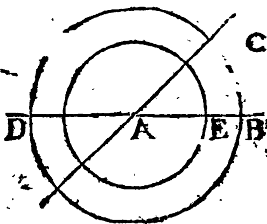
Propositions évidentes touchant les Angles.

AVERTISSEMENT.

Ce sont des Corollaires de la Définition de l'Angle.

PROPOSITION I.

5. *Il est évident par la définition de l'Angle, que sa grandeur ne dépend pas de la longueur des lignes qui le forment, mais de leur ouverture.*



Qu'on prolonge les lignes *AB*, & *AC*, ou qu'on en retranche, c'est toûjours la même ouverture; & la surface qui est à cette ouverture, c'est-à-dire la plus près du sommet *A*, n'en est augmentée, ni diminuée.

PROPOSITION. II.

6. *Un angle ne peut être augmenté, ni diminué, que lorsqu'un de ses côtez en tournant sur le sommet comme sur un centre, s'éloigne ou s'approche de l'autre côté.*

PROPOSITION III.

7. *Un des côtez de l'angle en tournant & s'é-*

loignant de l'autre côté, fait toûjours cet angle plus grand, jusques à ce que faisant une ligne droite avec cet autre côté, il ne fait plus d'angle.

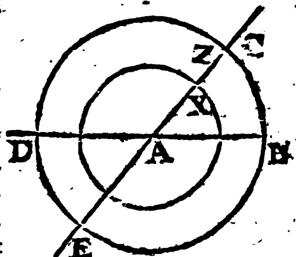
PROPOSITION IV.

Un des côtez de l'angle ne peut faire en tour- 8.
nant qu'un tour entier ou un cercle, après quoy il se joint avec l'autre côté, & ne fait avec lui qu'une seule ligne.

PROPOSITION V.

Les arcs ou portions de différens cercles décrits 9.
par les differens points d'un des côtez de l'angle sont d'un pareil nombre de dégrez.

Le point X du côté *AB* ou *AC* décrit le cercle XX, & le point Z le cercle *ZZ*; je dis que les portions de ces deux cercles comprises entre les rayons *AB* & *AC* sont d'un égal nombre de degrés. Car puisqu'ils sont décrits en même temps, si nous divisons ce temps en 360 momens, autant que le cercle a de dégrez. Dans le premier moment où *Z* décrira la 360e. partie de toute sa grandeur, il est évident que X sera aussi une même partie du cercle qu'il décrit. Car comme dans un même temps ces deux cercles entiers s'achevent, aussi chaque partie s'acheve à proportion.



PROPOSITION VI.

Du sommet d'un angle, comme d'un centre, 10.
ayant fait un cercle, la portion de ce cercle

comprise entre les côtez de cet angle, est la mesure de cet angle.

Proposition VII.

81. *Le plus grand angle ne peut avoir pour sa mesure toute la demie circonference.*

Car lorsque le côté *AC* de l'angle *BAC*, a fait en tournant la demie circonference *BCD*, que *C* est venu au point *D*, alors il ne fait plus qu'une ligne droite avec *AB* : Car puisqu'on suppose que *BCD* est la demie circonference, il faut que *AD* + *AB* soit le diametre du cercle ; & qu'ainsi *AD* & *AB* ne soient qu'une ligne droite qui coupe le cercle en deux parties égales. Toute la circonference du cercle est de trois cens soixante dégrez, & par consequent la demie circonference de cent quatre-vingts dégrez ; ainsi un angle ne peut jamais être de cent quatre-vingts dégrez : car lorsque le coté *AB* est venu en *D*, *AC* & *AB* ne font qu'une ligne droite.

Avertissement.

Que si AC *passe au delà de* DA, *& vient en* E, *il se formera par ce moyen l'angle* BAE, *plus grand que* 180 *dégrez, que quelques Geometres nomment Revers, & qui a pour sa mesure l'arc* BCDE, *on ne considere pas ici cette sorte d'angle, mais seulement celui* EAB *mesuré par l'arc* EB *complement de l'arc* BCDE *au cercle entier, ainsi qu'on le va expliquer.*

Des differentes ſortes d'angles par rapport à leur ouverture, ou par rapport au cercle.

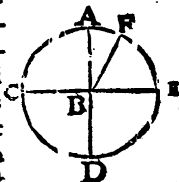
AVERTISSEMENT.

Il y a de trois ſortes d'angles, par rapport à leur ouverture ou au cercle. qui ſont, l'angle droit, l'angle aigu, & l'angle obtus.

DEFINITION I.

Un angle qui a pour ſa meſure la moitié de la demie circonference, ou le quart de l'entiere circonference du cercle, c'eſt-à-dire un arc de quatre-vingts-dix dégrez, s'appelle Angle droit. 12.

Ainſi ſuppoſant que l'arc *AC* eſt le quart de la circonference *ACDE*, & par conſequent de nonante degrez, qui ſont le quart de trois cens ſoixante dégrez que vaut tout le cercle, * l'angle *ABC* qui a pour meſure cet arc *AC*, eſt droit. * *I.* 1. 27.



DEFINITION II.

Un angle qui a pour ſa meſure un arc de plus de nonante degrez, eſt dit obtus. 13.

L'angle *FBC* eſt obtus, *fig. preced.* l'arc *FC* qui le meſure, étant de plus de nonante dégrez, puiſqu'il eſt plus grand que le quart du cercle *AC*.

DEFINITION III.

Un angle qui a pour ſa meſure un arc qui a moins de nonante dégrez, eſt appellé aigu. 14.

L'angle *FBE* eſt aigu, ayant pour ſa meſure l'arc *FE*, moindre que l'arc *AE* de nonante dégrez, *même figure*. L'angle aigu, peut diminuer

à l'infini. Mais l'obtus ne peut augmenter que jusqu'à ce qu'il s'approche infiniment de deux angles droits.

DEFINITION IV.

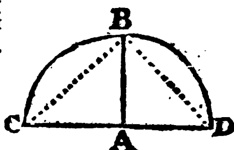
15. *L'angle aigu qui avec l'obtus vaut deux droits, est appellé le complement de l'angle obtus au demi cercle.*

Ainsi, *figure précédente*, l'Angle *FBE* est le complement de l'angle obtus *CBF*.

THEOREME I.

16. *Une ligne perpendiculaire sur une autre ligne, fait avec elle deux angles droits; & si elle fait deux angles droits, elle est perpendiculaire.*

1°. *BA* est perpendiculaire sur *A* milieu de *CD*; d'où comme centre ayant décrit le demi cercle *CBD*, par la notion de la perpendiculaire, les lignes ou cordes *BC* &
* L. 1. n. 50. *BD* sont égales *; ainsi les arcs qu'elles soûtiennent sont égaux *: &
* L. 1. n. 51. partant puisque *CBD* est la moitié de la circonference, *CD* étant



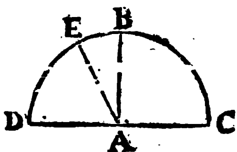
le diametre du cercle, les arcs *BC* & *BD* en seront le quart; donc les angles *BAC* & *BAD* ayant chacun pour mesure le quart de cercle,
* 5 n. 11. ils sont droits *.

2°. Il est facile de démontrer la seconde partie; car si les deux angles *CAB* & *DAB* sont droits, les arcs *BC* & *BD* sont égaux, moitié
* 7 n. 12. chacun de la demié circonference *; mais *A* & *B* étant ainsi en égale distance de *C* & de *D*, la
* L. 1. n. 43. ligne *AB* est perpendiculaire *.

THEOREME II.

17. *Toute ligne tombant sur une autre forme deux angles égaux à deux droits.* Eucl. I. Prop. 13.

Soit la ligne *EA*, qui tombe sur la ligne *DC*, je dis que l'angle *DAE*, plus l'angle *EAC* valent deux droits. Car du point *A* comme centre, ayant décrit le demi cercle *DEC*, & élevé la perpendiculaire *AB*, soit que l'angle *DAE* soit droit, obtus, ou aigu suivant les Définitions*, il a pour sa mesure l'arc *DE*, & l'angle *EAC* a pour la sienne l'arc *EC**; ces deux arcs sont ensemble la demie circonference du cercle égale à 180 dégrez, ou à deux droits*.



* § n. 12. 13. 14.
* § n. 10.
* § n. 11.

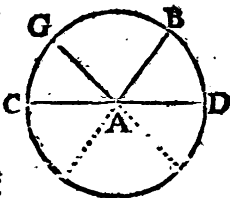
COROLLAIRE I.

18. *Il est évident qu'une infinité de lignes tombant sur une autre ligne dans le même point, formeront des angles qui tous ensemble ne vaudront que deux droits.*

COROLLAIRE II.

19. *Ainsi deux ou plusieurs lignes se coupant en un point lors qu'elles sont prolongées, forment des angles qui tous ensemble ne vaudront que quatre angles droits.*

Qu'on conçoive tant de lignes qu'on voudra, qui tombent sur *CD* au point *A*. De ce point comme centre ayant décrit un cercle, la mesure de tous ces angles sera la demie circonference *CGBD*, qui est la mesure de deux angles droits. Ayant prolongé les côtez *AB*, & *AG*, les angles qu'ils feront



seront aussi égaux à deux droits : Donc tous les angles qui se peuvent faire au tour de *A* sont égaux à quatre droits.

THEOREME III.

20. *Si à un point de quelque ligne droite se rencontrent deux autres lignes droites, faisant avec elle de part & d'autre deux angles égaux à deux droits, ces deux lignes se rencontreront directement.* Euclid. I. Prop. 14.

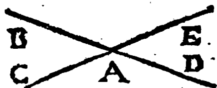
Les deux lignes droites *AB* & *AC* se rencontrent au point *A* de la ligne droite *AE*, & font de part & d'autre de cette ligne les deux angles *EAB* & *EAC* égaux à deux droits, il faut prouver qu'elles se rencontrent directement, c'est-à-dire qu'elles ne font ensemble qu'une seule ligne droite.

Soient *BAE* + *CAE* égaux à deux droits. Si on dit que *BA* & *AC* ne font pas une seule ligne, & que *BA* étant prolongée va en *D*; donc par le Theorême précédent les angles *BAE* & *EAD* vaudront deux droits; donc *EAD* = *BAC*; ce qui est absurde.

THEOREME IV.

21. *Deux lignes qui se coupent font les angles opposez au sommet égaux.* Eucl. I. Prop. 15.

Les deux lignes *BD* & *CE* se coupent au point *A*. Je dis que les angles *DAC* & *BAE* sont égaux, comme aussi *DAE* & *CAB*.



CAB & *BAE* valent deux droits; *BAC* & *DAC* valent aussi deux

* 3 n. 17. droits*; donc *CAB* + *BAE* = *CAB* + *DAC*;

ôtant de ces deux valeurs égales l'angle commun *CAB*, les restes *DAC* & *BAE* seront égaux. Par le même raisonnement, on fait voir que *CAB* = *DAE*.

DEFINITION IV.

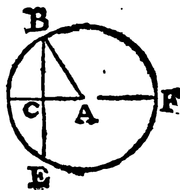
22. *Le Sinus d'un arc, est la moitié de la corde du double de cet arc, ou la perpendiculaire abaissée de l'extremité de cet arc sur le rayon.*

L'arc *EB*, *Figure suivante*, est le double de l'arc *BD*; la ligne *BC*, moitié de *BE* corde de *BDE* est sinus tant de l'arc *BD* que de l'arc *BF*, son complément au demi cercle; ainsi les arcs *DE* & *BF* égaux ensemble au demi cercle ont un même sinus, & sont reciproquement complément l'un de l'autre au demi cercle.

DEFINITION V.

23. *Le sinus d'un angle est le sinus de l'arc qui le mesure.*

Ainsi *BC* qui est sinus de l'arc *BD*, mesure de l'angle *BAD*, est le sinus de cet angle. Lorsqu'un angle est obtus, son sinus est aussi le sinus de l'angle aigu, qui est son complément au demi cercle; ainsi *BC* est sinus de l'angle obtus *BAF* aussi-bien que de l'angle aigu *BAD*. Mais dans la suite l'on ne considere que les sinus des angles aigus, s'il n'est autrement expliqué.



BC *étant le sinus de l'angle* BAD, *on appelle* CD *compris entre* BC *&* *l'arc* BD, *le sinus verse de cet arc* BD; *donc* BC *est le sinus qu'on nomme sinus droit, ou simplement sinus*, CD *étant toûjours distingué par sinus verse. La ligne* DE

qui touche l'arc ED, *& qui est terminée par* AE *&* AD *qui comprennent le même arc, se nomme tangente de cet arc & de l'angle* BAD ; *la ligne* AE *s'appelle sécante de cet angle & de cet arc. On a supputé les rapports ou raisons qu'ont tous les differens sinus avec le rayon le supposant de tant de parties, par exemple de* 10000. *Il y a des Tables de toutes ces supputations, dont on retire de grands avantages, qui sont expliquées dans l'explication & l'usage de ces Tables.*

THEOREME V.

24. *Les angles égaux ont des sinus égaux ; & si les sinus sont égaux, les angles sont égaux.*

1°. Les angles *CAB* & *GEF* sont égaux. Ainsi de leur sommet *A* & *E*, & d'un intervalle égal, ayant fait les arcs *CB*. *GF* qui mesurent ces angles, ces arcs seront égaux.* Je les continuë de sorte que *CB* = *BM* & *GF* = *FN* : donc puisque les arcs égaux ont des cordes égales*, *CM* = *GN* ; & par conséquent *CO* & *GP* les moitiés de ces cordes sont égales ; or ces moitiés sont les sinus des angles *CAB* & *GEF*, suivant la Définition* ; donc les sinus de ces angles sont égaux.

Si les sinus *CO* & *GP* sont égaux, *CM* = *GN*,* & partant *CBM* = *GFN* ; donc les angles *CAB* & *GBF* étant mesurez par les moitiés de ces arcs égaux, ils sont égaux.

* § n. 10.

* L. 1. n. 31.

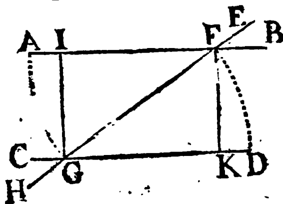
* § n. 22.

* § n. 22.

THEOREME VI. 25.

Si une ligne coupe obliquement deux paralleles, elle forme huit angles, dont il y en a quatre d'alternes interieurs, & quatre exterieurs. Je dis que les alternes exterieurs, ou interieurs sont égaux. Eucl. I. Prop. 29.

Il faut prouver que *AFE* = *HGD*, & que *AFG* = *FGD*. Les deux prémiers sont alternes extérieurs, & les deux autres alternes interieurs.



DEMONSTRATION

Je méne entre les deux paralleles les perpendiculaires *FK* & *GI*, qui sont égales*. D'un même intervalle *GF*, & des centres *F* & *G* je fais les arcs *AG* & *DF*, mesure des angles *AFG* & *FGD*. Les sinus de ces arcs ou angles sont les perpendiculaires égales *GI* & *FK**. Ces angles sont donc égaux*, & *AFE* & *AFG* valent deux droits*, comme *FGD* & *DGH*; ainsi *AFE* + *AFG* = *FGD* + *DGH*. Otant de part & d'autre les angles égaux *AFG* & *FGD*, restera *AFE* = *DGH*.

* *L. 1. n.* 65.
* *§ n.* 23.
* *§ n.* 24.
* *§ n.* 17.

AUTRE DEMONSTRATION.

Si l'on conçoit que *AB* tombe toûjours parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle arrive à *CD*, & que le point *F* s'unisse avec le point *G*; il est clair qu'elle la couvrira parfaitement. Alors l'angle *AFE* deviendra *CGF*; mais *CGF* = *HGD**. Il en est de même des autres.

* *§ n.* 21

THEOREME VII. 26.

Si une ligne joignant deux autres lignes fait

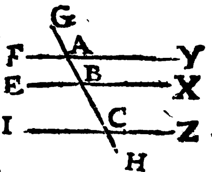
les angles alternes égaux, ces deux lignes sont paralleles. Eucl. I. Prop. 27.

Si *AFG* & *FGD* (*même figure*) sont égaux, leurs sinus *GI* & *FK* sont é-
* § n.24. gaux *, *GI* est perpendiculaire sur *AB*, & *FK* sur *CD*, par la Définition des si-
* § n.22. nus *; partant
* L. 1. n. 71. les deux lignes *AB* & *CD* *, sont paralleles.

THEOREME VIII.

27. *Une ligne coupant deux ou plusieurs paralleles, tous les angles qu'elle fait avec elles d'une même part, sont égaux.*

Il faut prouver que *GAY* = *ABX* = *BCZ*, que *YAB* = *XBC* = *ZCH*, & qu'il en est de même de l'autre part, que *GAF* = *ABE* = *BCI*, & *FAB* = *EBC* = *ICH*.



* § n.25. 1°. *ZCB* = *CBE* *, &
* § n.21. *CBE* = *ABX* *: Donc *ZCB* = *CBE* = *XBA*. Ainsi selon l'Axiome que deux grandeurs égales à une troisiéme, sont égales: *ZCB* = *XBA*. On démontrera de même que *GAY* = *ABX*, & le reste.

THEOREME IX.

28. *Si une ligne tombant sur plusieurs autres lignes fait avec elles des angles égaux pris du même sens, ces lignes seront parelleles.* Eucl. I. Prop. 28.

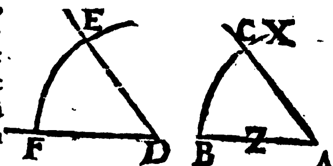
GAY + *YAB*, (*fig. précéd.*) valent deux
* § n.17. droits, comme aussi *GBX* + *GBE* *. Otant

donc de ces deux tous égaux les angles *GAY* & *GBX* qu'on suppose égaux, les angles alternes *YAB* & *GBE* resteront égaux. Donc* les lignes *Y* & *X* sont paralleles. On démontrera de la même maniere que *Y* & *Z*, ou *X* & *Z* sont paralleles. *S n. 26.

PROBLEME I.

29. *D'un point donné sur une ligne droite, décrire un angle rectiligne égal à un angle donné.* Euclid. I. Prop. 23.

Du point donné *A* sur la droite *Z*, il faut décrire l'angle *CAB* égal à l'angle *EDF*. Du point *D*, comme centre, je fais l'arc *EF*; après du point donné *A* comme centre, & de l'intervalle *DE*, je fais le cercle *X*, dont je prens l'arc *B C* égal à l'arc *E F*, au moyen des cordes égales



EF, *BC**; ensuite menant de *C* au point *A* une ligne droite, l'angle *CA B* sera celui que l'on proposoit de faire égal à *EDF*; car ils ont pour mesure des arcs égaux; ainsi ils sont égaux*. *L. 1. n. 31. *S n. 19.

PROBLEME II.

30. *D'un point donné hors d'une ligne mener une ligne droite sur une autre, qui fasse avec elle un angle égal à un angle donné.*

Soit donné le point *D* duquel il faut mener une ligne droite sur *Z*, qui fasse avec elle un angle égal à *X*.

Sur *Z* dans quelque point que ce soit pris à discretion, j'éleve un ligne telle que *AC*, qui

par le Problême précédent fasse l'angle *CAB* égal à l'angle donné *X*. Si cette ligne passe par le point *D*, le Problême est achevé.

Si elle n'y passe pas, je méne par *D* une ligne
* L. 1. n. 72. parallele à *CA* *, donc
* § n. 27. *DEB*=*CAB*=*X* *. Ainsi *DEB*=*X*.

X E Z E A D C

PROBLEME III.

31. *Couper un angle en deux parties égales.* Euclid. I. Prop. 9.

L'angle donné est *BAC*; ayant fait ses deux côtez *AB* & *AC* égaux, il faut les joindre par la ligne *BC*, sur laquelle, & du point *A* ayant mené une perpendiculaire
* L. 1. n. 46. *AG* *, *BD*=*DC* *; par-
* L. 1. n. 42. tant concevant que l'arc *BGC* est partie d'un cercle dont *A* est le centre, *AB* & *AC* les rayons, & *BC* la corde coupée en deux également par ladite perpendiculaire *AG*, l'arc *BC* le sera
* L. 1. n. 84. aussi au point *G* *; ainsi l'arc *BG* sera égal à l'arc *GC* : & partant les angles *BAG* *GAC*
* § n. 10. qu'ils mesurent * seront égaux. Donc l'angle *BAC* est coupé en deux également.

A B D C G

THEOREME X.

32. *L'angle mixte compris entre le cercle & sa tangente, est plus petit qu'aucun angle rectiligne.* Euclid. III. Prop. 16.

On ne peut mener une ligne droite entre le

cercle & la tangente*. On ne peut donc diviser l'angle mixte que fait le cercle avec sa tangente ; ainsi cet angle est plus petit qu'aucun angle rectiligne. *L. 1. n. 109.

AVERTISSEMENT.

C'a été une grande dispute, si l'angle étoit une quantité qui se pût diviser ; & ce qui en a fait douter, c'est la mauvaise définition qu'Euclide en donne. L'idée que nous en avons donnée en le définissant : l'ouverture des deux lignes qui se rencontrent indirectement, *renferme un espace, & par consequent une grandeur divisible.*

SECTION II.

De la comparaison des angles, & de leur differente position au regard d'un cerle.

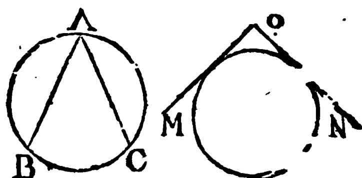
AVERTISSEMENT.

La mesure d'un angle, comme nous avons dit est l'arc du cercle qui a pour centre le sommet dudit angle, & pour termes les côtez qui le forment. Or le sommet d'un angle peut se trouver dans un cercle au centre, ou hors le centre : dans la circonference, ou hors la circonference ; & en tous ces cas, quoique ce soit toûjours le même angle, il donne lieu à differentes considerations.

DEFINITION I.

L'*Angle dont le sommet est dans la circonference du cercle, & les côtez dans le cer-* 33.

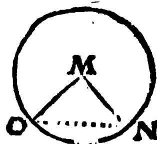
cle, est appellé Angle à la circonference, comme BAC.



Euclide appelle Angle inscrit, celui qui est dans la circonference, & circonscrit celui qui est hors le cercle, & dont les côtez touchent le cercle. *BAC* est un angle inscrit, *MON* est circonscrit.

DEFINITION II.

34. *L'angle au centre est l'angle dont le sommet est au centre du cercle, & dont les côtez sont rayons, comme* OMN.

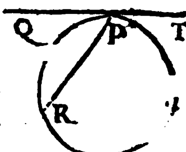


DEFINITION III.

35. *Le segment d'un cercle est une partie de ce même cercle comprise entre une corde*, comme dans la figure suivante, PR *forment un grand & un petit segment.*

DEFINITION IV.

36. *L'Angle formé par une tangente & une corde ou secante, tirée du point d'attouchement, est nommé Angle du segment, comme* QPR *ou* RPT.



THEOREME

THEOREME I.

L'angle du segment a pour mesure la moitié de l'arc qu'il comprend entre sa corde. Euclid. III. Prop. 32. 571

Soit l'angle *CBE*, formé par la tangente *CB*, & par la corde *BE*, il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *BE*.

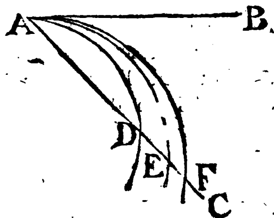
Soit mené le diametre *GH* coupant l'arc & la corde *EB* en deux parties égales ; & soit encore tiré le diametre *AF* parallele à la corde *EB*, & le rayon *AB* passant par le point d'attouchement, il formera l'angle au centre *GAB*, qui a pour mesure l'arc *GB*. Il n'y a donc qu'à prouver que l'angle *CBE* lui est égal : ce qui est évident ; car l'angle *CBA* est droit aussi bien que l'angle *GAF* * : mais l'angle *EBA* est égal à l'angle *BAF*, parce qu'ils sont alternes *. Donc ôtant ces deux angles égaux, sçavoir *FAB* de *GAF* qui est droit, & *ABE* de l'angle droit *ABC*, les restes *BAG* & *CBE* seront égaux. Or *BAG* a pour mesure l'arc *BG* ; donc *CBE* qui lui est égal, a pour sa mesure un arc égal à *BG*, moitié de *BGE* ; ce qu'il falloit prouver.

* *L.* 1. *n.* 91. & 108.
* S *n.* 25.

On prouvera par un semblable raisonnement, que l'autre angle *DBE* a pour sa mesure l'arc *BH*, moitié de l'arc *BHE*, compris dans ledit angle entre la tangente *BD* & la corde *BE*, en ajoûtant aux angles droits *DBA*, *FAH*, les angles alternes égaux *EBA*, *BAF*, au lieu que pour la précédente démonstration on les en a retranchez.

COROLLAIRE.

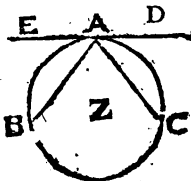
58. *Il est évident que, si l'on fait passer entre la tangente & la corde, une infinité de portions de circonferences de cercles, coupées par cette corde prolongée, elles seront toutes d'un égal nombre de degrez, puisqu'elles serviront de mesure à un même angle.* Car l'angle *BAC* ayant pour mesure la moitié de *AD*, de *AE*, de *AF*, &c. s'il étoit par exemple de dix degrez, toutes ces portions seroient chacune de vingt degrez.



THEOREME II.

59. *L'Angle à la circonference a pour mesure, la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé.*

Soit l'angle *BAC*. Il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *BC*. Soit mené par le point de *A* la touchante *ED*; elle formera deux nouveaux angles *EAB*, & *DAC*, qui par le précédent Theorême auront pour mesure la moitié des arcs *AB*, *AC*; mais les trois angles qui se forment au point *A*
* § n. 18. sont égaux à deux droits *; donc ils ont pour
* § n. 12. mesure la moitié de la circonference du cercle *; donc les moitiez des arcs *AB* & *AC* étant mesures des angles *BAE* & *CAD*, la moitié du reste du cercle, c'est-à-dire la moitié de *BC*, sera la mesure de *BAC*.



COROLL

Il est évident que tous
rence d'un cercle, & qui
arc, sont égaux. Eucl. II

Ainsi les angles *AB*
ADC, en quelque endro
la circonference *ABDC*
soient, sont tous égaux
ils ont tous pour leur m
la moitié de l'arc *AC*, su
quel ils sont appuyez : pa
ayant une même mesure,

COROLLA

L'Angle du centre est a
circonference qui s'appu
sur le même arc. Eucl. II
Prop. 20.

Soit l'angle *CAD* au cen
tre, & *CBD* à la circonfe
rence ; il est clair que
premier qui a pour mesu
tout l'arc *CD* est double
CBD. qui n'en a que la mo

COROLLAI

Dans des cercles égau
(soit qu'ils soient ou au c
ference,) sont appuyez su
III. Prop. 26.

Si cela n'étoit pas, ces a
sures inégales, ils seroien
suppose égaux.

COROLLA

Dans des cercles égaux
centre ou à la circonferenc
sur des arcs égaux, sont
Prop. 27.

Ils ont des mesures égales ; ils sont donc égaux.

Corollaire V.

44. *L'angle à la circonference dans le demi-cercle, ou qui a pour base le diametre du cercle, est droit.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur la demie circonference, dont la moitié, qui est de nonante degrez, est la mesure de l'angle droit*.

* § n. 12.

Corollaire VI.

45. *L'angle dans le grand segment est aigu.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur un arc moindre que la demie circonference ; ainsi la moitié de cet arc, qui est sa mesure, est moins de nonante degrez: partant cet angle est aigu*.

* § n. 14.

Corollaire VII.

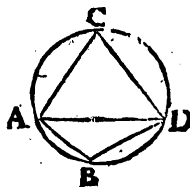
46. *L'angle dans le petit segment est obtus.* Eucl. III. Prop. 31.

Car il est appuyé sur un arc plus grand que la demie circonference, dont la moitié qui est la mesure, est de plus de nonante degrez : partant cet angle est obtus*.

* § n. 13.

Corollaire VIII.

47. *Les angles à la circonference étant opposez, & s'appuyant sur les mêmes points, sont égaux à deux droits.*



Soient les angles *ACD*, & *ABD* ; il est clair qu'ils ont pour mesure la moitié des arcs *ABD*, & *ACD**: & par consequent la moitié de toute la circonference, qui vaut deux fois nonante degrez ; ainsi ces deux angles ayant pour

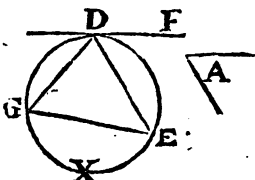
* § n. 39.

mesure ensemble la valeur de deux angles droits, sont égaux à deux droits.

PROBLEME I.

Couper un segment dans le cercle, qui soit capable d'un angle donné. Eucl. III. Prop. 34. 48.

Soit le cercle X duquel il faut rétrancher un segment capable de contenir un angle égal à l'angle donné *A*, ou ce qui est le même, que l'angle qui sera appuyé sur l'autre segment restant soit égal à l'angle donné *A*.



Je méne *DF* qui touche le cercle *X**, & sur *DF* je méne *DE* une seconde ligne qui fasse avec *DF* un angle égal à l'angle *A**, tout angle inscrit dans le cercle *X* qui est appuyé sur *DE*, a pour sa mesure la moitié de l'arc *ED**. Or la moitié de cet arc est la mesure de l'angle *EDF*, égal à *A**; donc on a fait ce qui étoit proposé : c'est-à-dire, que tout angle inscrit dans le cercle *X*, dont la base sera l'arc DE, en quelque part de la circonference du cercle que soit son sommet, il sera égal à l'angle *A*.

* L. 1. n. 112.
* § n. 29.
* § n. 39.
* § n. 37.

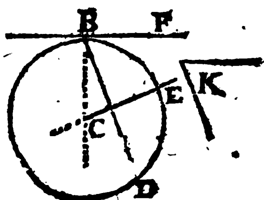
PROBLEME II.

Trouver le cercle dont le segment terminé par une ligne donnée, soit capable d'un angle égal à un angle donné. Euclid. III. Prop. 33. 49.

Sur *BD* soit fait l'angle *FBD* égal à l'angle *K** au point *B* soit élevée *BC* perpendiculaire sur *BF**, & sur le milieu de *BD* une autre perpendiculaire *EC*, qui coupera *BC* au point *C*; d'où ayant décrit un cercle de l'in-

* § n. 29.
* L. 1. n. 47.

* L. 1. n. 30. tervalle *BC**, on aura le cercle que l'on cherchoit ; ce qu'il faut prouver.



BF perpendiculaire sur le rayon *BC*, touche ce cercle*. L'angle *FBD* a pour sa mesure un arc égal à la moitié de l'arc *B D** ; tous les angles inscrits dans ce cercle & appuyez sur *BD* sont égaux, & ont pour leur mesure la moitié de l'arc *B D** ils sont donc égaux à l'angle *F B D* ; & partant à l'augle *K*, à qui on a fait égal *FBD*.

* L. 1. n. 106.

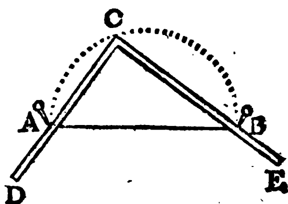
* § n. 37.

* § n. 39.

AVERTISSEMENT.

* § n. 40. *De ce que l'on a prouvé que tous les angles appuyez sur le même arc sont égaux, * on apprend le moyen de faire une portion de cercle de tant de degrez que l'on voudra, sans compas, ou sans avoir le centre de ce cercle, ce qui est d'une grande utilité.*

A B *est la corde d'un arc proposé, ou de la portion d'un cercle, laquelle il faut tracer. On veut que cet arc soit de dix degrez, ainsi l'angle inscrit dans cet arc, aura pour sa mesure la moitié de 350 degrez, ou de trois cens soixante degrez moins dix, c'est-à-dire, que cet angle sera de cent soixante-quinze degrez. Je dispose donc les deux régles droites* CD *&* CE, *de sorte que l'an-*



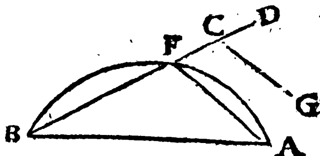
gle DCE soit de cent soixante-quinze degrez, & je les joins ensemble. Je plante deux clous à l'extremité de la corde A & B, après quoi tournant le point C ensorte que les deux regles CD & CE rasent toûjours les clous A & B; je décrirai la ligne circulaire ACB, qui sera l'arc que l'on cherchoit.

Par ce moyen on peut décrire la portion d'un cercle, quelque grandeur que puisse avoir ce cercle. Cette operation est mécanique; en voici une qui est géometrique.

PROBLEME III.

La corde d'un segment de cercle étant donnée avec l'angle dans ce segment, trouver les points par où passe l'arc dont la corde est donnée, sans connoître ni chercher le centre du cercle, dont cet arc est partie. 50.

La corde donnée du segment qu'on veut décrire, est *AB*. Je tire la ligne *BD*, faisant quelqu'angle avec *BA*. Ensuite dans un point de cette ligne pris à discretion, je fais l'angle *GCF* égal à l'angle donné; ensuite je méne par *A* une ligne parallele à *GC*; ainsi l'angle *AFB* est égal à



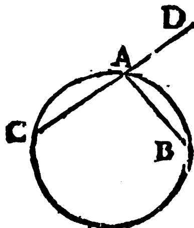
GCF *, & à l'angle donné : partant l'arc proposé, selon ce que vient d'être démontré, passe par *F*; par une semblable operation, je trouve les autres points par où passe cet arc, sans qu'il soit nécessaire de chercher le centre du cercle dont cet arc fait partie.

* § n.27.

THEOREME III.

51. *L'angle dont le sommet est dans la circonference, fait par une corde & par une secante prolongée hors le cercle, a pour sa mesure la moitié de l'arc de la corde, plus la moitié de l'arc de la secante.*

Soit *AB* une corde, & *CD* une secante prolongée hors le cercle, dont une partie est la corde de l'arc *CA*. Il faut prouver que l'angle *BAD* formé par la corde *AB*, & la secante *CD*, a pour sa mesure la moitié de l'arc *AB*, plus la moitié de l'arc, *AC*.



Les deux angles *CAB* & *BAD* sont ensemble égaux à deux droits* ; ils ont donc pour leur mesure la moitié de la circonference du cercle*; mais l'angle *CAB* a pour sa mesure la moitié de l'arc CB* : l'angle *BAD* restant aura donc pour sa mesure les moitiez des arcs restans *CA*, *AB* qui avec l'arc *CB* font le cercle entier.

* 2 n. 17. * 2 n. 12. * 2 n. 39.

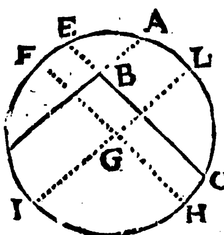
THEOREME IV.

52. *L'angle formé par la section de deux cordes qui se coupent au dedans d'un cercle, a pour sa mesure la somme des moitiez des arcs sur lesquels il s'appuye.*

Soit *B* le le sommet de l'angle dans le cercle. Il faut prouver qu'il a pour sa mesure la moitié des arcs *AE* & *DC*. Si *B* étoit le centre, cela seroit évident. Que le point *G* soit le centre, je méne par *G* des paralleles aux côtez de l'angle *CBD*. Cet angle est égal à l'angle *IGH**, dont la mesure est l'arc *HI*. Il n'est

* 1 n. 27.

donc question que de prouver que l'arc *HI* est la moitié des arcs *DC* & *AE*.

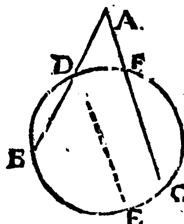


Les arcs *HI* & *FL* sont égaux*. *DI* = *AL* & *CH* = *EF**. Or *HI* = *AE* + *AL* + *EF*. Comme aussi *HI* = *DC* — *CH* (ou *EF*) — *DI* (ou *AL*,) c'est-à-dire, *HI* = *DC* — *EF* — *AL*. Par consequent *HI* + *HI* = *AE* + *AL* + *EF* + *CD* — *EF* — *AL*. Or + *AL* + *EF* — *AL* — *EF* = zero. Donc *HI* + *HI* (ou 2 *HI*) = *AE* + *DC*. Par consequent l'arc *HI* est aussi la moitié des arcs *DC* & *AE*, qui sont ainsi la mesure de l'angle *CBD* égal à *IGH*, dont l'arc *HI* est la mesure. * § n. 21. & n. 41. * L. 1. n. 86.

THEOREME V.

53. *L'angle dont le sommet est hors du cercle, mais dont les côtez le traversent, & s'appuyent sur la circonference, a pour sa mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.*

Soit l'angle *BAC*. Je dis qu'il a pour mesure la moitié de l'arc *BC*, moins la moitié de *DF*.



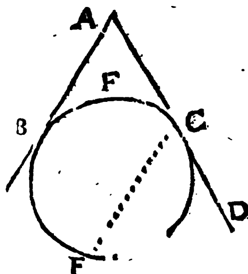
Je méne par *D* une paralle à *AC**; ainsi l'angle *BAC* est égal à *BDE**, qui a pour sa mesure la moitié de l'arc *BE**. Les arcs *CE* & *DF* sont égaux*. Or *BE* = *BC* — *CE*; donc *BE* = *BC* — *DF*. Donc la moitié de *BE* est égale à la moitié * L. 1. n. 72. * § n. 27. * § n. 39. * L. 1. n. 86.

de *BC* — *DF*; ainsi puisque l'angle *BAC* a pour sa mesure la moitié de *BE*; il a pour mesure la moitié de l'arc concave *BC*, sur lequel il est appuyé, moins la moitié de l'arc convexe *DF*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VI.

54. *L'angle dont les côtez touchent le cercle, a pour mesure la moitié de l'arc concave moins la moitié de l'arc convexe.*

Soit l'angle *BAC*, ses côtez *AB*, *AC* touchant le cercle. Il faut prouver qu'il a pour mesure la moitié de *BEC* moins la moitié de *BEC*.



Je méne par *C* un des points d'attouchement *CE* paralle-
* L. 1. n. 72. le à *AB**, l'angle *BAC* est égal à l'an-
* 3 n. 27. gle *DCE**. Or *DCE* a pour sa mesure la
* 3 n. 37. moitié de l'arc *CE**, qui l'est aussi de *CAB* : partant reste à prouver que l'arc *BEC* — *BFC* est égal à l'arc *CE*. 1°. L'arc *BEC* — *BE*
* L. 1. n. 86. est égal à l'arc *EC*. 2°. Puisque * l'arc *BC* est égal à l'arc *BE* : donc *BEC* — *BFC* = *EC*; ce qu'il falloit prouver.



SECTION III.

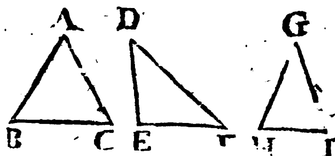
Des Triangles.

DEFINITION I.

LE *triangle eſt une ſurface bornée par trois lignes. Il y en a de ſix eſpeces : trois par rapport aux côtez, & trois par rapport aux angles.* 55.

DEFINITION II.

Le triangle qui a ſes trois côtez égaux eſt appellé équilateral comme ABC. 56.



DEFINITION III.

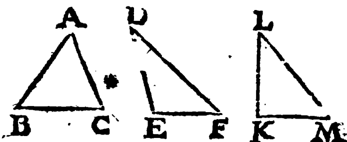
Le triangle qui a ſeulement deux côtez égaux eſt nommé Iſocele, comme HGI. fig. précéd. 57.

DEFINITION IV.

Le triangle dont les côtez ſon inégaux eſt nommé Scalene, comme DEF. fig. précedente. 58.

DEFINITION V.

Le triangle qui a un angle droit, eſt appellé Rectangle, comme LKM. 59.



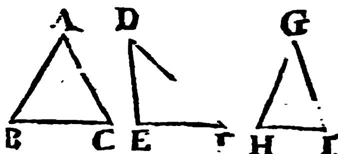
DEFINITION VI.

Le triangle qui a un angle obtus, eſt nommé 60.

Obtus-angle, ou Ambligone, comme DEF.

DEFINITION VII.

61. *Le triangle qui a tous ses angles aigus est appellé Acutangle, ou Oxigone : comme* ABC.



DEFINITION VIII.

62. *Un triangle est dit inscrit dans le cercle lorsque le sommet de ses trois angles est dans la circonference de ce cercle, & alors ce cercle est dit Circonscrit à ce triangle.*

DEFINITION IX.

63. *Un triangle est dit circonscrit à un cercle lorsque ses angles sont hors du cercle, & que ses côtez touchent ce cercle; & alors ce cercle est dit Inscrit dans ce triangle.*

DEFINITION X.

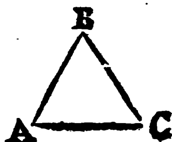
64. *Deux triangles sont dits équiangles, lorsque les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.*

DEFINITION XI.

65. *Deux triangles sont dits entierement égaux, lorsqu'étant équiangles, les côtez qui comprennent les angles de l'un sont égaux aux côtez qui comprennent les angles de l'autre chacun à chacun.*

THEOREME I.

66. *Dans un triangle deux de ses côtez, quels qu'ils soient, sont plus grands que le troisiéme.* Eucl. I. Prop. 20.



AB + *BC* sont plus grands que *AC*; On a dit

qu'entre deux points *A* & *C* on ne peut concevoir aucune ligne plus courte que la droite *AC* *. *I. r. n. 12.

COROLLAIRE.

Ainsi on ne peut faire un triangle de trois lignes données, si deux de ces lignes ne sont plus grandes que la troisiéme. Eucl. I. Prop. 22. 67.

PROBLEME I.

Trois lignes étant données en former un triangle. Eucl. I. Prop. 1. & 22. 68.

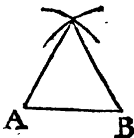
Soient les trois lignes données *A*, *B*, *C*. D'une des extrêmitez de ces trois lignes, par exemple de *C*, je fais un arc de l'intervalle de *A*; & de l'autre extrêmité, je fais un autre arc de l'intervalle de *B*, ensuite ayant mené du point où ces deux arcs se coupent, les deux lignes *A* & *B* aux extrêmitez de *C*, le triangle sera fait, dont les côtez par la construction seront égaux aux lignes données.



PROBLEME II.

Sur une ligne donnée décrire un triangle équilateral. 69.

Soit la ligne donnée *AB*. Il faut de l'ouverture de cette ligne, & de ses extrêmitez *A* & *B* comme centres, décrire deux arcs; du point où ils se couperont, menant des lignes par *A* & par *B*, on aura un triangle équilateral.



PROBLEME III.

Circonscrire un cercle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 5. 70.

C'est la même chose que de faire passer un cercle par trois point donnez *.

* L. v. n. 87.

COROLLAIRE.

71. *Il est évident que pour trouver un point également éloigné de trois points donnez, qui ne sont pas sur une même ligne, il faut décrire par ces trois points un cercle, le centre de ce cercle sera le point qu'on cherche.*

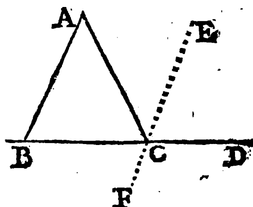
DEFINITION XII.

72. *L'on appelle angle exterieur de tout triangle, l'angle formé par le prolongement d'un des côtez.*

Dans le triangle *BAC figure suivante*, ayant prolongé *BC* en *D*, l'angle *ACD* est nommé l'angle exterieur, consideré comme opposé aux deux interieurs *CAB* & *ABC*.

THEOREME II.

73. *L'angle exterieur d'un triangle est égal aux deux interieurs opposez.* Eucl. I. Prop. 32.



Je mene *CE* parallelement à *AB*, & je partage ainsi l'angle exterieur *ACD* en deux angles *ACE* & *ECD*, qu'il faut prouver égaux aux deux interieurs opposez, ce qui est évident; car *ABC* = *ECD* *, & *BAC* = *ACE* *.

* § n. 27.
* § n. 25.

COROLLAIRE.

74. *Donc l'angle exterieur est plus grand qu'aucun des interieurs opposez.* Eucl. I. Prop. 16.

Il faut bien que cela soit, puisque cet angle exterieur est égal aux deux interieurs opposez, ainsi qu'on vient de le démontrer.

THEOREME III.

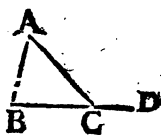
Les trois angles d'un triangle sont ensemble 75.
égaux à deux angles droits. Eucl. I. Prop. 32.

Pour le démontrer, je circonscris un cercle au triangle donné *. Ses trois angles ont pour mesure la moitié des arcs qui les soûtiennent * ; ainsi ils ont pour mesure la moitié de la circonference du cercle, c'est-à-dire 180 degrez, valeur de deux angles droits *.

* § *n.* 7.
* § *n.* 39.
* § *n.* 12.

AUTRE DEMONSTRATION.

Les deux angles *ACB* & *ACD* valent deux angles droits * ; mais *ACD* angle exterieur, est égal aux deux opposez interieurs *ABC* & *CAB* * ; donc ces deux angles avec *ABC* sont égaux à deux angles droits,



* § *n.* 17.
* § *n.* 73.

COROLLAIRE I.

Donc connoissant les deux angles d'un trian- 76.
gle, on connoît le troisiéme.

Car les trois valent 180 degrez ; si deux valent 160, le troisiéme doit valoir 20.

COROLLAIRE II.

Les trois angles d'un triangle peuvent être 77.
aigus.

Car on peut partager cent quatre-vingt degrez, valeur des trois angles d'un triangle, en trois parties, dont chacune sera moindre que la valeur d'un angle obtus ou d'un angle droit, & qui toutes trois ne feront que cent quatre-vingt degrez valeur de deux angles droits

COROLLAIRE III.

Dans un triangle il ne peut y avoir plus d'un 78.
angle droit, ni plus d'un obtus,

Si deux des angles étoient droits, les trois ensemble vaudroient plus de deux droits. Si deux

étoient obtus, l'angle obtus étant plus grand que le droit, les trois ensemble vaudroient aussi davantage que deux droits ; ce qui est contre le Theorême précédent.

COROLLAIRE IV.

79. *Deux angles d'un triangle sont donc nécessairement aigus, ou plus petits que deux droits.* Eucl. I. Prop. 17.

Cela est évident, puisqu'un triangle ne peut avoir deux de ses angles, ni droits ni obtus.

COROLLAIRE V.

80. *Si dans deux triangles, deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, ils sont équiangles, c'est à-dire que le troisiéme angle de l'un est égal au troisiéme angle de l'autre.*

Car les trois angles de chacun de ces triangles sont égaux à deux droits ; ainsi puisque de deux touts égaux, ôtant des parties égales, les restes sont égaux, il faut qu'aprés avoir ôté de chaque triangle les deux premiers angles de l'un, égaux aux deux premiers de l'autre, le troisiéme angle de l'un qui reste, soit égal au troisiéme angle de l'autre.

COROLLAIRE VI.

81. *Si un triangle a un de ses angles plus grand que celui d'un autre triangle, les deux autres ensemble seront plus petits que les deux autres de celui-là.*

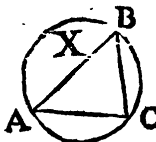
Car ôtant de la valeur de deux droits une plus grande partie, ce qui reste doit être plus petit, que lorsqu'on ôte moins.

THEOREME IV.

82. *Le triangle scalene à ses trois angles inégaux.*

Soit *ABC* un triangle scalene. Je lui circon-
* n. 70. scris le cercle *X* *, puisque les trois côtez *AB*,

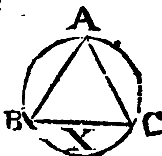
AC, *BC* ſont inégaux, les trois arcs dont ils ſont les cordes ſont inégaux*, par conſequent les trois angles du triangle *ABC*, qui ont pour meſure la moitié de ces arcs*, ſont inégaux. * *L.* 1. *n.* 32. * 5. *n.* 39.



THEOREME V.

83. *Dans le triangle iſocele les angles ſur la baſe ſont égaux; & ſi les angles ſur la baſe ſont égaux, le triangle eſt iſocele.* Eucl. I. Prop. 5.

Soit *ABC* un triangle iſocele. Je lui circonſcris le cercle *X*, puiſque $AB = AC$, les arcs que ces côtez ſoûtiennent ſont égaux. Or la moitié de ces arcs égaux eſt la meſure des angles *ABC* & *ACB**; donc ces angles ſont égaux. * 5 *n.* 39.



L'autre partie de cette propoſition eſt facile. Car ſi les deux angles *ABC* & *ACB* ſont égaux, les arcs *AB* & *AC*, ou leur cordes ſont égales; ainſi le triangle *ABC* eſt iſocele.

COROLLAIRE I.

84. *Aucun des angles de la baſe d'un iſocele ne peut être droit ni obtus.*

Car ſi l'un étoit droit, l'autre le ſeroit auſſi: ainſi ſes trois angles vaudroient plus que deux droits; ce qui ne peut être*. Et ſi l'un étoit obtus, l'autre le ſeroit; ainſi deux ſeuls angles de ce triangle vaudroient plus que deux angles droits: ce qui eſt encore plus impoſſible. * 5 *n.* 75.

COROLLAIRE II.

85. *Si deux triangles iſoceles ont l'angle de leur ſommet égal, ou un des deux de leur baſe, ils les ont tous.*

Car 1°, Si cet angle égal est sur la base, ils auront le second angle de la base égal, partant

* n. 80. le troisiéme *.

2°. Si c'est l'angle du sommet, la valeur des deux angles sur la base de chaque triangle sera la même; or chacun sera la moitié de cette même somme, ainsi ils seront égaux.

THEOREME VI.

86. *Les trois angles d'un triangle équilateral sont égaux.*

Ayant décrit un cercle à l'entour du triangle équilateral, les arcs dont les côtez de ce trian-

* L. 1. n. 31. gle sont les cordes, sont par consequent égaux*, & leurs moitiez égales. Or ces moitiez sont la

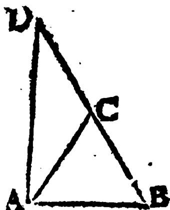
* n. 39. mesure des angles du triangle *. Donc tous ces angles sont égaux.

COROLLAIRE.

87. *Ainsi chaque angle d'un triangle équilateral est aigu, & toûjours de soixante degrez.*

AVERTISSEMENT.

88. *De ce Corollaire on tire un moyen d'élever autrement qu'il a été enseigné, une perpendiculaire sur le point donné d'une ligne, par exemple sur le point* A *de la ligne* AB. *Je fais le triangle équilateral* ABC, *ensuite je prolonge* BC *jusqu'en* D, *de sorte que* CD = CB, *je mene une ligne droite de* D *à* A, *qui sera perpendiculaire, si l'angle* BAD *est droit. Or je démontre qu'il l'est : car l'angle* ACB *est égal aux*



* n. 73. *deux opposez* D *&* A* *qui sont égaux *, puis-*

* n. 83. *que* CD = CA; *ainsi* ACB *étant de* 60 *degrez*, DAC *est de* 30, CAB *est de* 60; *partant*

l'angle BAD *est de* 60 + 30 *ou de* 90 *degrez, valeur de l'angle droit.*

THEOREME VII.

Dans un triangle le plus grand côté soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand côté. Eucl. I. Prop. 18. & 19. 89.

Ayant décrit un cercle à l'entour d'un triangle, le plus grand côté de ce triangle soûtient le plus grand arc *. Or * la moitié de cet arc mesure l'angle opposé à ce plus grand côté; donc cet angle qui est mesuré par la moitié du plus grand arc, est le plus grand.

* *L.* 1. *n.* 32. * *S n.* 39.

Dans un triangle inscrit dans un cercle, le plus grand angle est mesuré par la moitié du plus grand arc. Or ce plus grand arc à la plus grande corde * ; ainsi le côté opposé à cet angle est le plus grand.

* *L.* 1. *n.* 32.

THEOREME VIII.

Dans un triangle, si deux de ses angles sont égaux, les côtez opposez à ces angles sont égaux. Eucl. I. Prop. 6. 90.

Ayant inscrit ce triangle dans un cercle, ces angles égaux seront soûtenus par des arcs égaux, qui ont des cordes égales, côtez opposez à ces angles.

THEOREME IX.

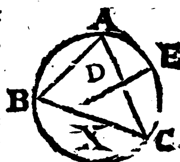
Dans un triangle, la moitié de chaque côté est le sinus de l'angle opposé. 91.



Le triangle *ABC* soit inscrit dans le cercle *X*, il faut démontrer que *AD*, moitié de *AC*, est le sinus de l'angle *ABC*.

L'arc *AE*, moitié de l'arc *AC*, est la mesure de l'angle

* 5 n. 39. *ABC** ; ainsi l'arc *AC* est double de l'arc ; qui est la mesure de l'angle *ABC* : Donc *AD* moitié de la corde de l'arc *AC*, est le sinus de
* 5 n. 22. & 23. l'arc *AE** , & celui de l'angle *ABC*.



On démontre paa la même voye que la moitié de *BA* est le sinus de l'angle *ACB*, & la moitié de *BC* celui de *BAC*.

AVERTISSEMENT.

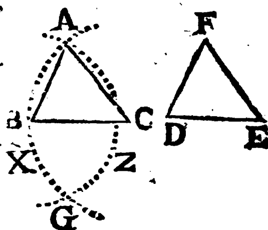
Donc le sinus d'un angle est au côté opposé à cet angle, comme le sinus d'un autre angle est à son côté opposé, ou les sinus des angles sont entr'eux comme les côtez opposez, puisque les moitiez sont comme les tous.

THEOREME X.

12. *Deux triangles dont les côtez sont égaux, sont équiangles, & entierement égaux.*

Les triangles *ABC* & *DEF* ont leur côtez égaux. Je dis qu'ils sont équiangles & entierement égaux : ou ce qui est la même chose, qu'étant posez l'un sur l'autre, ils conviennent.

1°. *BC* étant égal à *DE*, il est clair que la ligne *DE* étant posée sur *BC*, elles conviendront ensemble. Si on dit que *DF* ne conviendra pas avec *AB*, ni *FE* avec *AC*, je demontre le contraire. De *B*



comme centre & de l'intervalle *AB* ou *DF*, lignes égales, je décris le cercle *Z* ; & de *C* & de

l'intervalle *AC* ou *EF*, qui sont égales, le cercle *X*; ces deux cercles se coupent nécessairement au point *A*.

2°. Il est évident que *D* étant posé sur *B*, le point *F* se trouvera nécessairement dans le cercle *Z*, & que *E* étant posé sur *C*, le point *F* se trouvera dans le cercle *X*: le point *F* se trouvera donc dans *Z* & *X*, partant dans le point *A* où ces deux cercles se coupent; ainsi ces deux triangles posez l'un sur l'autre conviendront en tout, & seront égaux: ce qu'il falloit démontrer.

On pourroit dire que ces deux cercles *Z* & *X* se coupent ailleurs qu'en *A*: il est vrai; mais par ce qui a été démontré, ce ne peut être qu'en deux points *, & ce second point est nécessairement au-dessous de *BC*; sçavoir au point *G*, comme il est évident; ainsi s'ils se coupoient au-dessus de *BC* en un autre point qu'en *A*, ils se couperoient en trois; ce qui ne peut être *.

* L. 1. n. 89.

* L. 1. n. 88.

COROLLAIRE I.

93. *Si des extrémitez d'une ligne droite on mene deux autres lignes droites, qui se rencontrent en point, on ne pourra des mêmes extrémitez, & de même part, mener deux autres lignes droites égales aux deux premieres chacune à la sienne, qui se rencontrent en un autre point.* Eucl. I. Prop. 7.

Car cela fait deux triangles dont les côtez sont égaux, qui par consequent étant équiangles doivent convenir.

COROLLAIRE. II.

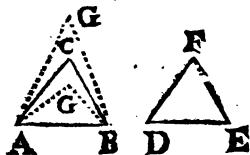
94. *Deux triangles qui ont chacun deux côtez égaux aux deux côtez de l'autre, & la base égale à la base, les angles compris entre les côtez égaux, sont égaux*, Eucl. I. Prop. 8.

Ces deux triangles ayant leurs côtez égaux, sont entierement éqniangles.

THEOREME XI.

95. *Deux triangles équiangles, qui ont un côté égal, sont entierement égaux.*

ABC & *DEF* sont équiangles, & *AB*=*DE*, je dis qu'ils sont entierement égaux, car si on les pose l'un sur l'autre, *DE* conviendra avec *AB*, puisque ce sont deux lignes égales. Si *DF* ne convient pas avec *AC*, mais avec *AG*: comme les angles, *FDE* & *CAB* sont égaux, il s'ensuivra que l'angle *CAB*=*GAB* qui sera le même que *FDE*; ce qui ne pouvant être, il faut reconnoître que *DF* conviendra avec *AC*, & par la même raison *FE* avec *BC*, ainsi le point *F* avec *C*, & par consequent ces deux triangles sont en tout égaux.



COROLLAIRE.

96. *Deux triangles qui ont deux angles égaux & un côté égal, sont entierement égaux.* Eucl. I. Prop. 26.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux, sont entierement équiangles *. Par consequent s'ils ont un côté égal, il faut selon ce Theorême, qu'ils soient entierement égaux.

* § n.80.

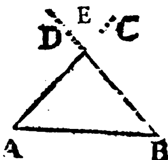
PROBLEME IV.

97. *Faire un triangle dont on a un côté, & les deux angles sur ce côté.*

Le côté donné est *AB*. L'angle au point *A* soit nommé *X*, & celui qui doit être sur *B* soit *Z*. J'éleve sur *A* la ligne *AC* qui fasse l'angle

CAB égal à *X** , & sur *B* la ligne *BD* qui fasse l'angle *ABD* égal à *Z*. Ces deux lignes se couperont, si *X* & *Z* ne sont ni droits ni ensemble plus grands que deux droits ; car s'ils l'étoient le Problême seroit impossible *, & ces deux lignes ne se couperoient point mais seroient paralleles *, ou iroient en s'écartanr, & il faut qu'elles concourent pour former un triangle tel que *ABE* qui est celui qu'on proposoit de faire. Car 1°, ayant deux angles égaux, il lui est équiangle *, & ayant un côté égal, ils sont entierement égaux par le Corollaire précédent.

* § n. 29.

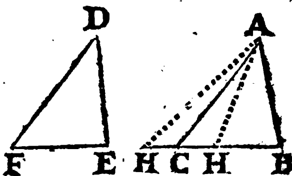


* § n. 79.
* L. 1. n. 68.
* § n. 80.

THEOREME XII.

98. *Deux triangles qui ont un angle égal, & les deux côtez qui comprennent cet angle, égaux, sont en tout égaux.* Eucl. I. Prop. 4.

L'angle *BAC* = *EDF*, & *AB* = *DE*, & *AC* = *DF* ; je dis que ces deux triangles conviendront étant posez l'un sur l'autre : car *DE* conviendra avec *AB* ; si *DF* ne convenoit pas avec *AC*, mais avec *AH*, l'angle *BAC* seroit égal à l'angle *BAH* ; ce qui



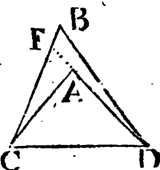
ne peut être : ainsi *DF* convient avec *AC*, & le point *F* avec *C*, par consequent *BC* = *EF* ; ainsi ces deux triangles qui ont leurs côtez égaux, sont équiangles *, c'est-à-dire, égaux en toutes choses. * § n. 92.

THEOREME XIII.

Deux triangles ayant une même base, l'an- 99.

gle du sommet de celui qui est compris, est plus grand que l'angle du sommet du triangle qui le comprend. Eucl. I. Prop. 21.

Les deux triangles *CAD* & *CBD*, ont *CD* pour base. *CAD* est renfermé dans *CBD*. Il faut prouver que *A* > *B*.

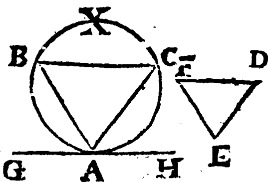


Je prolonge *DA* jusques en *E*. L'angle exterieur *CAD* est égal aux opposez interieurs
* § n. 73. *AEC*, *ECA** ; ainsi il est plus grand que chacun d'eux. Par même raison *CED* = *EBD*, *BDE* ; ainsi il est aussi plus grand qu'aucun d'eux. *CAD* par consequent étant > *CED*, il est > que *CBD* ; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME V.

100. *Dans le cercle inscrire un triangle équiangle à un triangle donné.* Eucl. IV. Prop. 2.

Soit le triangle donné *FED*. Il faut l'inscrire
* L. 1. n. dans le cercle *BAC*. Je tire la tangente *GH** ;
112. je fais l'angle *GAB* égal à *FDE*, & *CAH* égal
* § n 29. à *DFE**, j'acheve le triangle *ABC* en tirant la ligne *BC*.



Puisque l'angle *BAG*, dont la mesure est la moitié
* § n. 37. de l'arc *BA**, qui est aussi la mesure de l'angle *BCA*, est égal à *FDE*, donc *BCA* = *FDE*.

Par la même raison *CAH* égal à *DFE*, ayant pour sa mesure la moitié de l'arc *AC*, mesure de *CBA*, il faut que *CBA* & *DFE* soient égaux : ainsi ces deux triangles *ABC* & *EFD*, ayant deux angles égaux, ils sont entierement

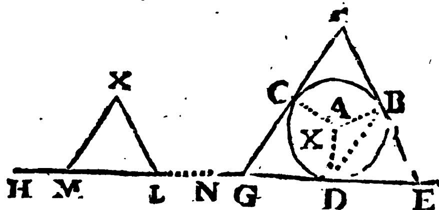
équiangles,

équiangles * : ayant donc inscrit ce triangle *ABC*, on aura fait ce qui étoit proposé. * § n. 80.

PROBLEME VI.

A l'entour du cercle décrire un triangle équiangle à un triangle donné, ou circonscrire au cercle un triangle équiangle à un triangle donné. Eucl. IV. Prop. 3. 101.

Le triangle donné est *KLM*, & le cercle est *X*. Ayant tiré le rayon *AD*, je fais * d'une part l'angle *BAD*=*NLK*, & de l'autre *DAC* =*KMH*; ensuite ayant mené par les trois points *B*, *D*, *C*, les tangentes *EF*, *FG*, & *GE* * : je dis que le triangle *EFG* sera équiangle à *LKM*. * § n. 29. * L. 1. n. 121.

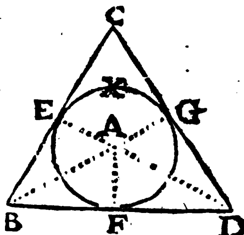


Les six angles des deux triangles *BAD* & *BED* valent quatre angles droits * ; *AB* & *AD* étant perpendiculaires *EBD* + *ABD* vaut un droit, *EDB* + *BDA* vaut encore un droit. Donc *BED* + *BAD* vaut deux droits. Or par la construction *BAD*=*KLN*, cet angle *KLN* + *KLM* vaut deux droits. Donc *BED*=*KLM*. Par la même voye on démontre que *DGC* =*KML*, & par consequent que *EFG*=*LKM*, & qu'ainsi les triangles *EFG* & *LKM* sont équiangles *. * § n. 75. * § n. 80.

PROBLEME VII.

Décrire un cercle dans un triangle. Eucl. IV. Prop. 4. 102.

*ℨ n. 31. Je coupe, comme on l'a enseigné *, les angles *CBD* & *CDB* en deux parties egales par les lignes *BA* & *DA* : & du point *A* où ces deux
*L. 1. n. 46. lignes se coupent, je mene * les perpendiculaires *AE*, *AF*, *AG* sur les côtez du triangle ; ensuite de *A*, & de l'intervalle de l'une de ces lignes, je décris le cercle *X*, qui se trouvera inscrit dans le triangle *BCD* : pour le prouver il faut faire voir que les trois lignes *AE*, *AF*, *AG* sont égales.



Les deux triangles *AEB* & *AFB* sont rectangles par la construction, puisque *AE* & *AF* ont été faites perpendiculaires. Les angles *EBA* & *ABF* sont égaux par la construction : ainsi ces deux trian-
*ℨ n. 80. gles ayant deux angles égaux sont équiangles *. Ils ont le côté *AB* commun. Donc ils sont en-
*ℨ n. 96. tierement égaux *. Ainsi *AE* = *AF* : par la même voye on démontrera que *AG* est égal à *AF* & à *AE* : ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

103. *Trois lignes étant données, qui font un triangle si elles sont prolongées, on peut trouver un point qui en soit également éloigné.*

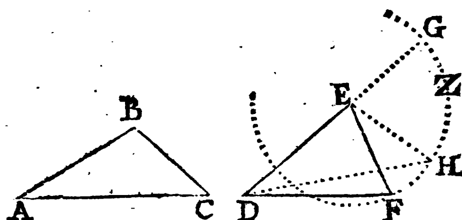
Le triangle fait, il y faut inscrire un cercle ; dont le centre sera le point qu'on cherche.

THEOREME XIV.

104. *Deux triangles qui ont deux côtez égaux à deux côtez chacun au sien, lesquels contiennent des angles inégaux, celui qui a le plus grand angle aura aussi la base plus grande, & reciproquement celui qui a la plus grande base, au-*

ra le plus grand angle. Euclide I. Prop. 24 & 25.

Soient deux triangles *ABC*, *DEF*. Si *AB* = *DE*, & *BC* = *EF*, & l'angle *B* > *E*; je dis la base *AC* > *DF*.



1°. Car si on conçoit le triangle *ABC* posé sur le triangle *DEF*, en sorte que les points *A* & *B* conviennent avec *D* & *E*. Comme l'angle *ABC* a été posé plus grand que l'angle *DEF*, le côté *BC* ne conviendra pas avec *EF*, mais sera plus proche de *EG* comme en *EH*, & la ligne *DH* sera égale à *AC**. Considerant donc la ligne *EF* = *EH* comme tournant circulairement sur *E*, extremité de *DE*, en s'approchant par l'autre extrêmité *EG* au point *H*, la ligne *DH* qui enjoint les autres extrémitez sera plus grande que *DF** : ce qu'il falloit premierement démontrer.

* *I n.* 98.

* *L.* 1. *n.* 100.

2°. On démontrera en la même maniere l'inverse, si on pose la ligne *AC* ou *DH* > *DF*, que l'angle *DEH* = *ABC* sera plus grand que l'angle *DEF*, si on considere que la ligne *EH* est plus approchée de *EG* que *EF*, ayant tourné circulairement sur le point *E* en la maniere expliquée*.

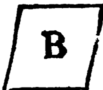
* *L.* 1. *n.* 100.

SECTION IV.

Des Figures de plusiéurs côtez.

DEFINITION I.

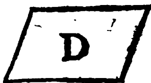
105. *LES figures Quadrilateres, ou, de quatre côtez, reçoivent differens noms.* 1°. *Si les côtez opposez sont paralleles, c'est un* Parallelogramme. 2°. *Si les quatre côtez sont égaux, & tous les angles droits, c'est un* Quarré.



3°. *Si les quatre côtez sont égaux, & les angles opposez aussi égaux, mais non droits, c'est un* Rhombe *ou* Losange, *comme* B.



4°. *Si tous les côtez ne sont pas égaux, mais tous les angles droits, c'est un* Quarré long, oblong, Parallelogramme rectangle, *ou simplement* Rectangle, *comme* C.



5°. *Si seulement les côtez opposez sont égaux, & les angles opposez aussi égaux, mais non droits, cette figure est* Rhomboïde, *comme* D.



6°. *Tout autre quadrilatere, dont les côtez opposez ne sont ni paralleles ni égaux, s'appelle un* Trapeze, *comme* E.

DEFINITION II.

Une figure est dite reguliere, lorsque tous ses côtez & tous ses angles sont égaux. 106.

DEFINITION III.

Une figure de plusieurs côtez se nomme generalement Poligone. *Elle prend le nom qui lui est propre du nombre de ses côtez, ou du nombre de ses angles que comprennent ses côtez Ainsi une figure de cinq côtez est nommée* Pentagone; *de six*, Exagone; *de sept*, Eptagone; Octogone, Enneagone, Decagone, Endecagone, Dodecagone; *ainsi de suite.* 107.

DEFINITION IV.

Une figure reguliere est dite inscrite dans un cercle, lorsque tous ses angles sont dans la circonference du cercle; mais elle est dite circonscrite, lorsque tous ses côtoz touchent la circonference du cercle. 108.

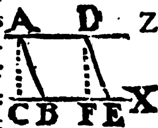
DEFINITION V.

Ayant mené deux lignes des extrémitez d'un des côtez d'une figure reguliere inscrite dans un cercle ou circonscrite, au centre de ce cercle, l'angle que ces lignes font est appellé Angle du centre; & les angles que font ses côtez pris deux à deux, sont nommez Angles de la figure. 109.

LEMME I.

Les lignes obliques qui font des angles égaux entre les mêmes paralleles, sont égales. 110.

Soient menées les perpendiculaires *AC* & *DF* entre les paralleles *Z* & *X*, elles seront égales*; mais les angles *ACB* & *DFE* étant droits, & les angles *ABC* & *DEF* égaux par l'ypothese, les deux triangles *ABC* & *DEF* sont donc équiangles*: partant *AC* égal à *DF*, ils seront



* L. 1. n. 65.

* S. n. 80.

* § n. 96. tous égaux* ; & par consequent *AB* = *DE* : ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

111. *Les lignes qui font sur une même ligne, mêmes angles, sont paralleles.*

Les lignes *AB* & *DE* font sur *Z* & *X* (*même figure ci-dessus*) les mêmes angles ; ainsi *ABC* = *DEF* : par consequent *AB* & *DE* doivent

* § n. 28. être paralleles*.

LEMME III.

112. *Deux lignes qui joignent deux lignes égales & paralleles, sont égales.* Eucl. I. Prop. 33.

Si *AD* & *BE*, *fig. preced.* joignent les deux lignes *AB* & *DE* égales & paralleles, je dis qu'elles sont aussi égales. Les perpendiculaires *AC*

* L. 1. n. 68. & *DF* sont paralleles*, & *AB* & *DE* étant paralleles, les angles *ABC* & *DEF* sont égaux*.

* § n. 27. Or *ACB* & *DFE* sont droits ; ainsi ces deux

* § n. 80. triangles *ABC* & *DEF* étant équiangles* & ayant un côté égal, puisque *AB* = *DE* ils sont

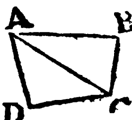
* § n. 95. entierement égaux* ; partant *BC* = *EF* : donc *CF* = *BE*. Or *AD* & *CF* sont entre les paral-

* L. 1. n. 65. leles *AC* & *DF*, elles sont égales*. Donc *BE* = *CF* = *AD* ; ainsi *BE* = *AD*.

THEOREME I.

113. *Les quatre angles d'un quadrilatere sont égaux à quatre droits.*

Soit le quadrilatere *ABCD*. Il faut prouver que ses quatre angles valent quatre angles droits. Ayant mené la ligne *AC* d'un des angles, à l'angle opposé, & partagé cette figure dans les deux triangles *ABC* & *ACD*, les angles de chacun desquels va-

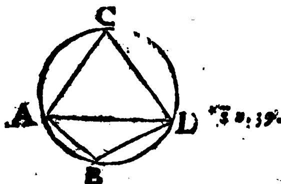


* § n. 75. lent deux droits*. Ainsi tous les angles de *ABCD* valent quatre droits.

THEOREME II.

114. *Les angles opposez d'un quadrilatere inscrit dans un cercle, valent deux angles droits.* Eucl. III. Prop. 22.

Le quadrilatere *ABCD* est inscrit dans le cercle. Les deux angles opposez *ACD* & *ABD*, ont chacun pour mesure la moitié de l'arc sur lequel ils sont appuyez*. Or étant appuyez ensemble sur toute la circonference ; ils ont donc pour mesure la moitié de toute la circonference : donc ils valent deux angles droits*. Il en est de même pour les deux autres angles *BAC* & *BDC*.

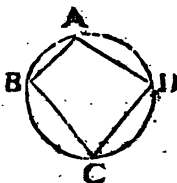


** I. n. 39.* ** I. n. 49.*

COROLLAIRE.

115. *Si les angles opposez d'un quadrilatere ne valent pas deux droits, on ne le peut inscrire dans un cercle.*

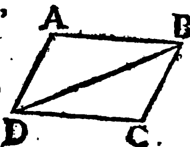
Car si on le pouvoit, les angles opposez de ce quadrilatere seroient égaux à deux droits par ce Theorême. Ils ne le seroient pas par la supposition ; ce qui est impossible.



THEOREME III.

116. *Si les côtez opposez du quadrilatere sont égaux, ils sont paralleles.*

AB = *CD* & *BC* = *AD*, le côté *BD* est commun ; donc ces deux triangles *ABD* & *BCD* étant égaux, sont équiangles*. Donc l'angle *ABD* = *BDC*, par-



** I. n. 94.*

* § n.26. tant *AB* est parallele à *DC* *. De même *BC* sera parallele à *AD*, puisque l'angle *ADB* est égal à *DBC*.

THEOREME IV.

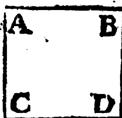
117\. *Si deux des côtez opposez d'un quadrilatere sont égaux & paralleles, les deux autres sont aussi égaux & paralleles.* Eucl. I. Prop. 23.

* § n.112. Ils sont égaux * ils sont paralleles *.
* § n.116.

THEOREME V.

118\. *Si les quatre angles du quadrilatere sont droits, c'est un Parallelogramme.*

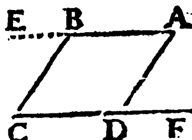
Car *AB* & *CD*, par l'hypothese, sont perpendiculaires sur *AC*; * I.1.2. partant * ils sont paralleles. *AC* & .68. *BD* sont aussi perpendiculaires sur *DC*; par consequent par la même raison, ces lignes sont paralleles.



THEOREME VI.

119\. *Des angles opposez d'un Parallelogramme sont égaux, & ceux qui sont proches valent deux droits.*

* § n.27. 1°. L'angle *FDA* = *DCB* *; & *FDA* =
* § n.25. *DAB* *; partant puisque deux angles égaux à un troisiéme, sont égaux *DAB* = *BCD* : Or *FDA* + *ADC* valent deux angles
* § n.17. droits *. Donc *BCD* égal à *ADF*, vaut avec *ADC* deux droits.



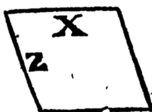
2°. On démontre de même que les deux angles oppsez *ABC* & *ADC* sont égaux, & que *BAD* + *ABC* valent deux droits; ce qu'il falloit démontrer.

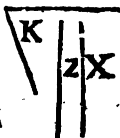
PROBLEME I.

120\. *Faire un Parallelogramme dont on a un an-*

gle, & les deux côtez qui le comprennent.

Les côtez donnez sont *Z* & *X*, l'angle donné *K* : il faut joindre *Z* & *X*, de sorte qu'ils fassent un angle égal à *K* *, * 3 n. 29.





& ensuite tirer deux lignes paralleles à *Z* & à *X* *. * L. 1. n. 72.

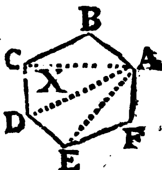
COROLLAIRE.

Donc pour faire un quarré dont on a un côté, il n'est question que de joindre deux lignes égales à celle qui est donnée, de sorte qu'elles fassent un angle droit. Eucl. I. Prop. 46. 121.

THEOREME VII.

Toute figure poligone ou de plusieurs côtez, se réduit en autant de triangles qu'elle a de côtez, moins deux 122.

Dans la figure Poligone *X*, ayant tiré d'un de ses angles *A*, à tous les autres angles, des lignes droites, on fait plusieurs triangles qui ont pour base les côtez de ce Poligone, à la réserve de deux qui sont aux deux côtez de *A*, dont *AB* & *AF* sont un des côtez. Ainsi il y a autant de triangles, qu'il y a de côtez moins deux. La même chose se trouve dans tous les Poligones; c'est pourquoi on peut dire absolument qu'un Poligone se peut réduire en autant de triangles qu'il a de côtez, moins deux.



COROLLAIRE.

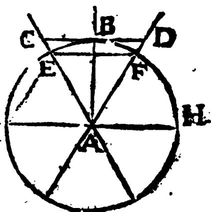
Donc tous les angles d'une figure de plusieurs côtez sont égaux à deux fois autant d'angles 123.

droits, qu'elle a de côtez moins quatre.

C'est-à-dire, que tous les angles de X qui a six côtez, sont égaux à huit angles droits. Car ce Poligone se réduit en autant de triangles qu'il a de côtez moins deux, c'est-à-dire en quatre. Donc puisque les angles de chaque triangle sont égaux à deux droits, tous les angles de ces quatre triangles seront ensemble égaux à huit droits; mais ils composent ensemble tous les six angles de cette figure. Ils seront donc égaux à huit droits, c'est-à-dire, à douze droits moins quatre. On peut donc dire que tous les angles d'un chiliogone, c'est-à-dire, d'une figure de mille côtez, sont égaux à mille neuf cens quatre-vingt-seize angles droits; ce qu'on conçoit clairement, quoiqu'il soit impossible d'imaginer nettement un Chiliogone.

AVERTISSEMENT.

On entend par Figures Regulieres. celles dont *§n.106. *tous les angles & tous les côtez sont égaux* *, *& qui par consequent peuvent être inscrites dans un cercle comme est la figure ci-jointe d'un exagone, on nomme l'angle* EAF *l'Angle du centre, parce qu'il est formé au centre du cercle par les rayons* AE, AF *tirez aux extremitez des côtez du Poligone, & les angles semblables à* GEF, *formez par la rencontre des côtez du Poligone, se nomment Angles du Poligone:* *§n.19. *Et comme il a été démontré* * *que tous les angles qui se forment au point* A, *pris ici pour le centre du Poligone, sont ensemble égaux à quatre droits. lorsqu'on veut sçavoir la grandeur de chaque angle du centre, comme ici dans l'exemple de l'exagone; il faut diviser* 360 *degrez valeur de quatre droits par six, nombres des côtez du Poligone, comme l'enseigne l'A-*



rithmetique, le nombre de soixante qui vient au quotient de la division donnera la valeur de l'angle du centre de l'exagone. L'angle du centre étant connû, celui du Poligone le sera aussi ; car comme les trois angles du triangle isocele EAF *sont ensemble égaux à deux droits* * *ou 180 degrez, ôtant l'angle du centre, le reste sera la valeur des deux angles égaux sur la base ou côté du Poligone, lesquels sont égaux au seul* GEF *angle dudit Poligone ; ainsi celui de l'exagone se trouvera être de 120 degrez. On pourroit également le connoître, parce qui a été démontré* * *; puisque cet angle* GEF *a pour sa mesure la moitié de la portion du cercle* GHF*, sur lequel il est appuyé : ainsi ôtant de 360 degrez que vaut tout le cercle, la partie* GF*, supposée ici de 120, restera 240, dont la moitié est la valeur de l'angle* GEF *ou du Poligone.* * 3. n. 73.

* 3. n. 33.

QUESTION.

Quels sont les Poligones qui se peuvent toucher par leurs angles, sans laisser d'espace vuide entr'eux.

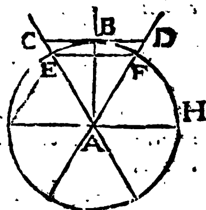
Pour cela il faut que leurs angles qui seront autour d'un point commun, fassent precisément quatre angles droits *. *Ainsi il n'y a que les quarrez & les exagones qui le puissent. Les quatre angles de quatre quarrez qui ont un point commun, font quatre angles droits. Les trois angles des trois exagones qui ont un point* * 3. n. 29.

commun, étant chacun de cent vingt, font ensemble trois cens soixante, valeur de quatre angles droits.

Des triangles équilateraux peuvent aussi le toucher; car en ayant placé six autour d'un point, leurs six angles qui se touchent font quatre angles droits.

Lorsqu'on connoît l'angle du centre d'une figure réguliere, on la peut inscrire dans un cercle. Il faut mener du centre deux rayons qui fassent un angle tel que doit être l'angle du centre de cette figure; car si c'est une figure de dix côtez, faisant un angle de trente-six degrez, qui est la dixiéme partie de trois cens soixante, la corde de cet angle sera un des côtez de cette figure.

Pour circonscrire un poligone ou figure reguliere autour d'un cercle, il faut premierement l'inscrire & en prolonger les rayons; après, ayant divisé par la moitié un des côtez de ce poligone inscrit, comme EF*, en menant le rayon* AB *par cette moitié, & fait au point* B *une tangente entre* AC *&* AD*, on aura un des côtez du poligone circonscrit. Ensuite il faut faire tous les rayons prolongez de l'inscrit égaux à* AC *&* AD*, par l'extremité desquels ayant mené des lignes droites on aura la figure que l'on cherchoit, ainsi qu'il est évident; mais l'on ne peut faire avec la seule regle & le compas l'angle du centre de toute figure reguliere, sans exception, comme nous le ferons voir; cela ne se peut que méchaniquement, en se ser-*

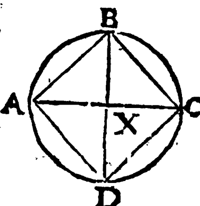


vant d'un demi cercle qui est divisé par degrez, qu'on nomme rapporteur.

PROBLEME II.

Inscrire un quarré dans le cercle X. Eucl. IV. Prop. 6. 124.

Le cercle X est donné pour y inscrire un quarré. Il faut mener une ligne par le centre du cercle telle que *AC* qui en soit le diametre; & sur celle-là & au centre, la pendendiculaire *BD*. Les quatre points *A*, *B*, *C*, *D* sont en égales distances*; ayant donc mené des lignes droites par ces quatre points, on aura un quarré dans le cercle X. Car 1°, cette figure a quatre côtez égaux. 2°. Tous les angles de *ABCD* sont droits*, car chacun d'eux est appuyé sur la demie circonference.



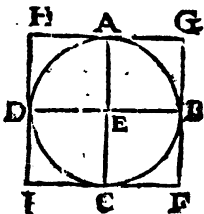
* *L.* 1. *n.* 42.

* I *n.* 44.

PROBLEME III.

Faire un cercle dans un quarré. Eucl. IV. Prop. 8. 125.

Le quarré *FGHI* est donné pour y inscrire un cercle. Ayant coupé par la moitié les quatre côtez de ce quarré, & mené *AC* & *BD*, si du point *E* où ils se coupent, & de l'intervale *AE*, on décrit un cercle, il se trouvera inscrit dans ce quarré : car les quatre lignes *AE*, *BE*, *CE*, *DE* sont égales ; ainsi le cercle passera par les points *A*, *B*, *C*, *D*.



PROBLEME IV.

126. *Circonſcrire un quarré à un cercle.* Eucl. IV. Prop. 7.

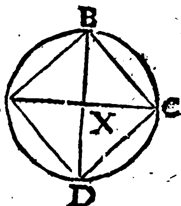
Le cercle *ABCB*, *fig. preced.* eſt donné pour lui circonſcrire un quarré, Il faut mener deux diametres qui ſe coupent à angles droits ; enſuite par les quatre extrêmitez de ces deux diamêtres, ayant mené quatre lignes tangentes au cercle, * elle feront le quarré que l'on cherche, comme il eſt évident.

* *L.* 1. *n.* 112.

PROBLEME V.

127. *Faire un cercle autour d'un quarré.* Euclid. IV. Prop. 9.

Le quarré *ABCD* eſt donné pour lui circonſcrire un cercle. Ayant tiré des Diagonales, c'eſt-à-dire, des lignes droites d'un angle à un autre angle oppoſé, & prenant pour rayon la moitié d'une des Diagonales, le cercle qu'on décrira ſera celui que l'on cherche.



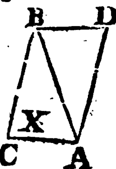
SECTION V.

De la meſure de l'Aire des Surfaces.

THEOREME I.

128. *En tout Parallelogramme, les côtez & les angles oppoſez ſont égaux entr'eux, & la Diagonale le coupe en deux également.* Eucl. I. Prop. 34.

Soit X un parallelogramme dont *AB* est la diagonale ; il faut prouver que l'angle *ADB* est égal à *ACB*, & que les côtez *AC* & *BD* sont égaux. Les deux angles *ABD* & *BAC* opposez alternativement sont égaux, *par le même raisonnement *BAD* = *ABC* le côté *AB* est commun ; ainsi ces deux triangles *ABD*, *BAC* sont entierement égaux* : Donc l'angle *D* égal à l'angle *C*, & l'angle *A* à l'angle *B*, puisqu'ils sont composez d'angles égaux, & *AD* = *CB*, comme aussi *AC* = *BD*, & *AB* coupe en deux également le parallelogramme *ABCD*.



* § n. 25.

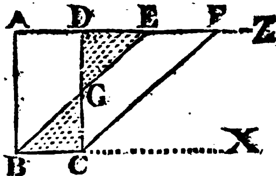
* § n. 96.

THEOREME II.

Les Parallelogrammes qui sont entre mêmes paralleles & sur même base, ou une autre égale, sont égaux. Eucl. I. Prop. 35. & 36. 129.

Si les Parallelogrammes *ABCD*, *EFGB* sont entre mêmes paralleles Z & X, & sur une même base, *BC*, ou une autre égale ; je dis qu'ils sont égaux.

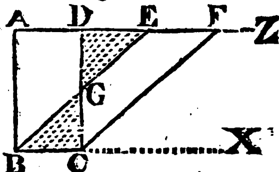
Si la base du Parallelogramme *BCEF* n'est pas la même de *ABCD*, sur *BC* soit fait * le Parallelogramme *EFCB* semblable & égal au donné *EFCD*. Il faut prouver que ce dernier Parallelogramme *EFGB* est égal au Parallelogramme *ABCB*.



* § n. 120.

Les côtez *AB*, *CD* du Parallelogramme sont paralleles par la supposition, ils sont aussi égaux*. Il en est de même des côtez *EB*, *FC* ; mais si * § n. 128.

à *AD* & *EF* supposées égales on ajoûte *ED*, les toutes *AE*, *DF* seront égales ; ainsi les deux triangles *EAB*, *FDC* ayant leurs trois côtez
* 5 n. 92. égaux seront entierement égaux* ; & ôtant de ces deux triangles égaux la partie *BGE* qui leur est commune, les trapezes *ABGD* & *CGEF* seront égaux.



Ajoûtant donc à l'un & à l'autre la même grandeur *BGC*, ce qui fait les Parallelogrammes *ABCD* & *BCEF*, ces deux figures seront égales ; ce qu'il falloit prouver.

Il faut remarquer que si le point *E* se trouvoit entre *D* & *A*, au lieu d'ajoûter *DE* on l'auroit retranché pour conclure l'égalité des lignes *AE*, *DF*, & ensuite celle des deux triangles *EAB*, *FDC*, & consequemment celle des deux Parallelogrammes, au moyen du trapeze commun qu'on auroit ajoûté.

COROLLAIRE I.

130. *Donc en mesurant la surface d'un parallelogramme, il ne faut avoir égard qu'à la base, & à la perpendiculaire qui mesure sa hauteur.*

Car *fig. preced.* le parallelogramme *BCEF* est égal à un parallelogramme rectangle dont *BC* est la base, & dont les côtez qui sont perpendiculaires sont égaux à sa hauteur. Ainsi c'est le parallelogramme rectangle, comme *ABCD*, qui est la mesure de tous les parallelogrammes dont les bases seront égales à *BC*, & qui auront même hauteur, ou seront entre les mêmes paralleles X & Z. Il ne peut y avoir qu'un parallelogramme

rectangle sur la base *BC* entre *X* & *Z* ; & il peut y avoir une infinité de parallelogrammes non rectangles sur la même base, & entre ces mêmes paralleles *X* & *Z*.

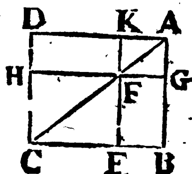
COROLLAIRE II.

Donc en mesurant l'étenduë d'un parallelogramme non rectangle, il ne faut point avoir égard à son circuit. 131.

Car quand les côtez *BE* & *CF* seroient d'un million de lieuës ou infinis ; ce qui se peut concevoir en supposant que les lignes *X* & *Z* soient prolongées à l'infini : ce parallelogramme dont le circuit est infini, ne sera pas plus grand que *ABCD* dont le circuit est fini.

THEOREME III.

Si par un point quelconque de la diagonale d'un parallelogramme on tire deux lignes paralleles aux côtez, elles diviseront le parallelogramme en quatre pieces, dont les deux que la diagonale ne traverse pas, & qu'on appelle Complemens, sont égaux entr'eux. Euclid. I. Prop. 43. 132.

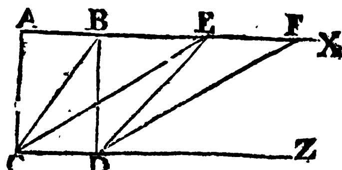


ABC = *ADC*, & *AGF* = *AKF*, & *FEC* = *FHC**. Des deux triangles égaux *ADC*, & *ABC*, ôtant des grandeurs égales *AKF*, & *FHC* d'une part ; & *AGF* & *FEC* de l'autre, les restes *FKDH* & *BEFG* seront égaux ; ce qu'il falloit démontrer. *§ n. 128.

THEOREME IV.

Les parallelogrammes sont doubles des triangles de même hauteur & de même base. Eucl. I. Prop. 41. 133.

Le triangle *ECD* a même base que le parallelogramme *ABCD*, & ils ont même hauteur étant entre les paralleles *X* & *Z* : je mene *DF* parallele à *CE* pour faire le parallelogramme *DCEF*, lequel est égal à *ABCD**. Or *CED* est égal à *EDF**. Donc *DCEF* ou sa grandeur égale *ABCD*, est le double de *CED*.



**n.129.* **n.128.*

CoROLLAIRE I.

134. *Donc les triangles de même base ou de base égale & de même hauteur, sont égaux.* Eucl. I. Prop. 37. & 38.

Puisqu'ils sont tous la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur.

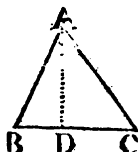
CoROLLAIRE II.

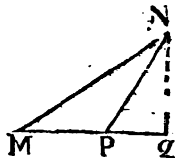
135. *Donc pour mesurer la surface d'un triangle, il ne faut avoir égard qu'à sa hauteur & à sa base.*

Puisqu'il est égal à la moitié d'un parallelogramme, qui a même base & même hauteur.

AVERTISSEMENT.

Pour mesurer le triangle ABC, *il faut donc abaisser du sommet la perpendiculaire* AD,





qui en est la hauteur, & multiplier BC *par la*

moitié de AD, *ou* AD *par la moitié de* BC; *ou* BC *par* AD, *& en prendre la moitié; ce qui revient au même.*

Si le triangle étoit obstusangle, comme MNP, *alors pour avoir la hauteur, il faudroit prolonger le côté* MP, *& du sommet* N *tirer la perpendiculaire* NQ.

THEOREME V.

Les triangles égaux de même base, ou de base égale, & posez d'une même part, sont entre les mêmes paralleles. Eucl. I. Prop. 39. & 40. 136.

S'ils sont égaux, ils ont même hauteur*; & par consequent les perpendiculaires abaissées de leur sommet sur leurs bases seront égales. Si on mene donc une ligne par leur sommet, elle sera parallele à leur base*.

* n. 134.

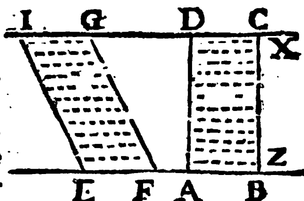
* L. 1. n. 64.

AVERTISSEMENT.

Ces propositions se peuvent démontrer par une autre methode, dont il est bon ici de donner quelque connoissance. Il est évident 1°, que lorsque deux surfaces planes sont faites par le mouvement de deux lignes droites & égales, si le mouvement de l'une & de l'autre ligne est égal, & qu'il dure autant de temps, ces deux surfaces sont égales. Si par exemple AB *est égale à* EF, *& que ces deux lignes se mouvent parallelement à elles-mêmes d'un mouvement égal, venant dans un même temps de* Z *à* X *deux lignes paralleles, les deux parallelogrammes* ABCD *&* EFGI *que décrivant* AB *&* EF *sont égaux.*

I G D C X Z E F A B

Si EF se meut bien toûjours parallelement à elle-même : mais qu'en même-temps elle ait un autre mouvement qui la porte ou à droit ou à gauche, on voit bien que ses extremitez E & F décrivent de plus grandes lignes, que A & B extrêmitez de AB qu'on suppose n'avoir qu'un mouvement qui la porte par le plus court chemin de Z à X ; ainsi quoique ABCD & EFGI soient des surfaces égales, le circuit de celle-ci est plus grand.

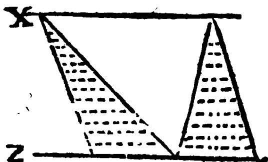


Si ces lignes AB & EF en se mouvant laissoient à chaque instant une trace, il est évident que comme on suppose qu'elles sont portées dans un même temps de Z à X, les deux surfaces ABCD & EFGH qu'elles décrivent, seroient couvertes d'un nombre égal de lignes toutes égales : & par consequent que ces deux surfaces doivent être égales. Ce qu'on peut démontrer encore plus sensiblement, au lieu que AB & EF sont des lignes mathematiques sans largeur ; supposons que ce scient des lignes qui ont quelque largeur, mais si petite qu'elle soit absolument indivisible, & qu'on les ayt rangé parallelement les unes à côté de AB, les autres à côté de EF entre Z & X lignes paralleles. Puisque l'espace entre Z & X est partout le même, & que ces indivisibles sont toutes égales, il y en aura autant sur AB que sur EF, elles feront par consequent deux surfaces égales. Si celles qui sont sur EF sont bien toûjours paralleles en-

trielles ; mais que l'extrêmité de la seconde passe au-de-là de E, & celle de la troisiéme encore au de-là ; alors le circuit de EFGI *sera plus grand que celui de* ABCD ; *& si nous supposions dans ces lignes une largeur indivisible, c'est-à-dire insensible, les côtez* EI *&* FG *ne seroient pas des lignes ; mais des lignes comme dentelées.*

Cette methode que nous expliquons ici s'appelle la methode des indivisibles ; parce qu'on suppose des lignes qui ont une largeur indivisible à cause de sa petitesse.

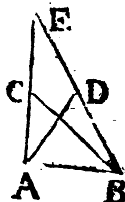
On peut employer cette même methode pour prouver l'égalité des triangles qui sont sur une même base, & qui ont la même hauteur ou qui sont entre deux paralleles ; car si on suppose que deux lignes égales ont le même mouvement, & qu'elles se diminuent proportionnellement, il faut que dans le même temps elles fassent des surfaces égales.



Si aussi on conçoit deux surfaces sur deux bases égales, composées d'un égal nombre de lignes indivisibles, qui sont diminuées proportionnellement ; de sorte que toutes soient égales chacune à chacune, il faut que ces deux surfaces qui sont deux triangles soient égales.

Remarquez que de deux triangles d'une surface égale, celui dont les côtez & les angles sont plus égaux entr'eux, a moins de circuit. 137. *Le triangle même rectangle aura plus de circuit qu'un équilateral qui lui soit égal : car*

soit ABC *un rectangle &* ABD *un équilateral de même* *§ n. 134. *hauteur ; ils sont égaux**. *Soit* AC *prolongé en* E, *de sorte que* AC=CE. *Le circuit de* ACB *est* AB+BC+CE. *Soit prolongé* BD *jusqu'à* E, *chaque angle de* ABD *est de* 60, *&* EAB *étant de* 90, *les angles* AEB *&* EAD *sont chacun de* 30. *Ainsi* EDA *est un isocele*, *&* DE=AD. *Donc* AB+BE *est le circuit de* ABD. *Or* BE *est plus petit que* BC+CE ; *donc le circuit de* ABD *est plus petit que le circuit de* ABC. *Nous ferons voir dans la suite qu'une figure qui est plus uniforme en toutes ses parties, renferme une plus grande surface dans un moindre circuit.*

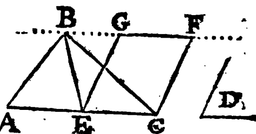


PROBLEME I.

138. *Faire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle donné.* Euclid. I. Prop. 42.

Le triangle donné est *ABC*, & l'angle donné *D*. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle qui ait l'angle égal à D.

1°. Par *B* sommet du triangle *ABC*, je mene *BF* parallele à sa base *AC**. *L. 1. n. 72. 2°. Sur *E*, moitié de cette base, j'éleve *GE* qui fasse avec *AC* un angle égal à *D**. *§ n. 29. 3°. J'acheve le parallelogramme *CEGF**, qui sera celui qu'on demande ; car il est égal au triangle *ABC**, & il a l'angle *GEC* égal à l'angle donné *D*. *L. 1. n. 72. *§ n. 133.

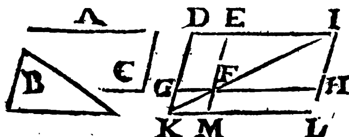


PROBLEME II.

Sur une ligne droite donnée, décrire un parallelogramme égal à un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné. Eucl. I. Prop. 44. 139.

La ligne donnée est *A*, l'angle donné est *C*. Il faut faire un parallelogramme égal au triangle *B*.

1°. Par le Problême precedent, je fais, selon l'angle *C*, le parallelogramme *DEFG* égal au triangle *B*. 2°. Je prolonge *GF* & *DE* : de sorte que *FH* = *A*, & *EI* = *FH* j'acheve le parallelogramme *EFHI*, je prolonge la ligne *IF* jusqu'à ce qu'elle trouve le prolongement de

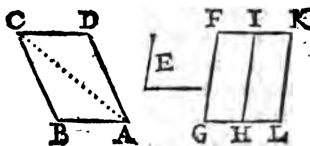


DG; & j'acheve le parallelogramme *DKLI*, dans lequel *FHLM* est égal à *DEFG**. Ainsi *FHLM* est le parallelogramme que l'on cherchoit égal au triangle *B* à qui *DEFG* a été fait égal. Ayant un angle égal à l'angle donné *C*, & étant fait sur *FH* égale à la ligne donnée *A*. *§ n. 132.

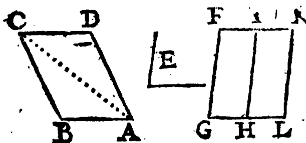
PROBLEME III.

Décrire un parallelogramme égal à une figure rectiligne donnée, & qui ait un angle égal à un angle rectiligne donné. Eucl. I. Prop. 45. 140.

La figure rectiligne donnée est *ABCD* l'angle donné *E*. 1°. Je resous la figure



ABCD en deux triangles par la ligne *AC*. 2°. Je fais le parallelogramme *GI* égal au triangle *ABC*, ayant l'angle *G* égal à l'angle



* Sn. 138. donné *E**. 3°. Sur *HI* je fais aussi le parallelogramme *IL* égal au triangle *ACD*, ayant l'angle * Sn. 139. *IHL* égal audit angle *E**. Cela étant fait, *GK* $=$ *GI* $+$ *IL*, donc *GK* $=$ *ABCD* est le parallelogramme requis.

Que si la figure avoit été composée de plus de deux triangles, on auroit fait la même chose sur la ligne KL *pour le troisiéme triangle qu'il a été fait sur* HI *pour le second, & ainsi des autres.*

DEFINITION.

141. *Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme Hipotenuse.*

THEOREME VI.

142. *Dans tout triangle rectangle le quarré de l'hipotenuse, ou du côté qui soûtient l'angle droit est égal aux deux quarrez des deux autres côtez.* Eucl. I. Prop. 47.

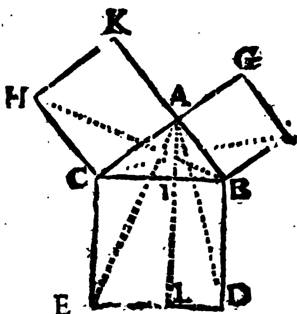
Soit le triangle rectangle *CAB*. Si sur l'hypotenuse *CB* on fait le quarré *CD*, (*on désigne ainsi un quarré ou parallelogramme par deux lettres en diagonale*) & sur les deux autres côtez *CA* & *AB*, on fait les quarrez *CK*, *BG*. Je dis que *CD* $=$ *CK* $+$ *BG*.

Soit mené du sommet *A*, la ligne *AL* perpendiculaire sur l'hipotenuse *BC*, elle divisera le quarré *CD* en deux parallelogrammes *IE* & *ID*, dont le premier est égal au quarré *CK*,

&

& le second au quarré *BG* ; ce que l'on démontre ainsi.

Soit mené du point *A* au point *E* la ligne *AE*, & du point *B* au point *H* la ligne *BH*. Ces deux lignes formeront les deux triangles égaux *ACE*, *BCH* *. Car le côté *CE*=*CB*



* 5 n. 98.

& *CA*=*HC* ; & les angles *ACE* & *HCB* renfermez par ces côtez sont égaux, ayant chacun un angle droit, & l'angle *ACB* commun. Mais le triangle *ACE* est moitié du parallelogramme *IE* *, parce que ces deux figures ont même base & qu'elles sont entre les mêmes paralleles. De même le triangle *HCB* est moitié du quarré *CK*, par la même raison. Or ces triangles sont égaux; donc les parallelogrammes qui en sont doubles, seront aussi égaux. * 2 n. 133.

Ce que l'on vient de dire du parallelogramme *IE*, & du quarré *CK*, se doit entendre du parallelogramme *ID*, & du quarré *BG*, donc, &c.

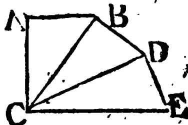
Remarque.

Cette proposition est d'un usage très-frequent & très-étendu dans la Geometrie, aussi-bien que dans la Résolution des Problêmes par l'analyse.

Probleme IV.

143. *Trouver un quarré égal à deux ou à plusieurs autres quarrez.*

Il ne faut que joindre les deux bases, *AB*, *AC* des deux quarrez proposez, de sorte qu'ils fassent un angle droit ; la base *CB* de cet angle sera le côté d'un quarré égal à ces deux quarrez, selon le précédent Theorême. Si l'on demande un quarré égal à trois quarrez donnez, & que *BD* soit le côté du troisiéme, je joins *BC* & *BD*, de sorte que ces deux lignes fassent un angle droit. Alors le quarré de *CD* est égal aux quarrez de *BC* & de *BD*, par consequent aux quarrez de *AC*, de *AB*, de *BD* ; & par cette methode l'on touvera un quarré qui soit égal à tant de quarrez que l'on voudra.



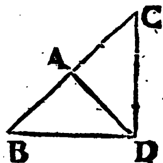
THEOREME VII.

144. *Si le quarré d'un des côtez d'un triangle est égal aux quarrez des deux autres côtez, l'angle compris entre ces deux côtez est droit*; Eucl. I. Prop. 48.

Je suppose qu'au triangle *ABD* le quarré du côté BD soit égal aux quarrez des deux autres côtez *AB*, *AD*. Cela étant, je dis que l'angle *BAD* compris entre les deux côtez *AB*, *AD* est droit.

Soit fait *AC* perpendiculaire sur *AD* & égale à *AB* ; donc les quarrez de *AD* & *AC* sont égaux à celui de

*§ n. 142. DC *. Or ces deux quarrez sont égaux par hypothese à celui de *BD*; donc les quarrez de *BD* & de *DC* sont égaux : Ainsi *CD* & *BD* sont égaux ; donc les deux triangles *ABD* &



ADC sont entierement égaux, & par consequent équiangles*. *BAD* est donc droit, aussi- *§ *n.* 92.
bien que *CAD*. On suppose ici, ce qui est évident, que les quarrez égaux ont des côtez égaux.

THEOREME VIII.

Un triangle est égal à deux ou plusieurs triangles de même hauteur, dont les bases prises ensemble sont égales à la sienne. 145.



Le triangle *ABC* est égal aux triangles *ABE*, *EAD* & *DAC*, qui sont ses parties. Or *ACD* = *CFD*, & *DAE* = *DGE*, & *EAB* = *EHB* *; donc *CAB* est égal à deux ou plusieurs triangles, &c. Ce qu'il falloit prouver. *§ *n.* 134.

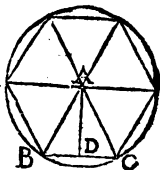
DEFINITION. 146.

On appelle Apothême *la partie du rayon perpendiculaire, qui est entre le côté d'un poligone inscrit, & & le centre du cercle.*

AD est un apothême. (*figure suivante.*)

THEOREME IX. 147.

La surface d'un poligone régulier est égale à un triangle qui a pour base le circuit de ce poligone, & pour hauteur l'apothême de ce poligone.



Ayant mené des lignes du centre *A* à chaque angle, on le réduit en autant de triangles qu'il a de côtez, tous égaux au triangle *ABC* qui a *BC* pour base & pour hauteur l'apothême *AD*; or un triangle qui a *AD* pour hauteur, & pour base le circuit de ce poligone est égal à tous ces triangles dont la hauteur est *DA*, & les bases prises en-

*Es n.143. semble, font le circuit de ce poligone, * qui est ce qu'il falloit prouver.

Propositions évidentes touchant les Poligones.

PROPOSITION I.

148. *Un poligone est plus grand que le cercle auquel il est circonscrit.*

PROPOSITION II.

149. *Un poligone est plus petit que le cercle dans lequel il est inscrit.*

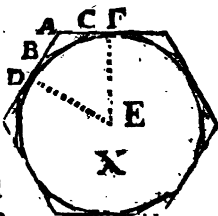
PROPOSITION III.

150. *Un cercle peut être pris pour un poligone d'une infinité de côtez.*

Car si un poligone dont le diametre est petit avoit un million de côtez, il est évident qu'il ne differeroit pas sensiblement d'un cercle. Si, dis-je, on conçoit dans un cercle autant de côtez qu'il a de points sensibles, ce sera un poligone & un cercle en même temps.

THEOREME X.

151. *De deux poligones reguliers circonscrits à un cercle, celui qui a plus de côtez, a un plus petit circuit & une plus petite surface.*



X est un poligone circonscrit à un cercle, je divise ses côtez pour faire un autre poligone qui ait plus de côtez, en menant des tangentes qui seront hors du cercle *; ainsi ce poligone sera plus grand que ce cercle*. Je considere la même partie de ces deux poligones, c'est-à-dire, qui soit circonscrite à la même partie

*L. 1. n. 106.

*S n. 146.

du cercle, par exemple à *EFD*, puisque *BA* + *AC* est plus grand que *BC*; donc *BD* + *BA* + *AC* + *CF* est plus grand que *DB* + *BC* + *CF*; ainsi le circuit de celui qui a moins de côtez est plus grand. La figure *EFCABD* excede *EFCBD* de la grandeur du triangle *ABC*; la surface de celui qui a plus de côtez est donc plus petite.

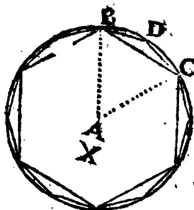
COROLLAIRE.

Donc puisque plus un poligone circonscrit a de côtez, plus il est petit, demeurant toûjours plus grand que le cercle auquel il est circonscrit; il s'ensuit que plus un poligone a de côtez, son circuit & sa surface approchent plus du circuit & de la surface du cercle auquel il est circonscrit; & qu'ainsi un poligone circonscrit d'une infinité de côtez ne differe point du cercle. 162

THEOREME XI.

De deux poligones reguliers inscrits dans un même cercle, celui qui a plus de côtez a un plus grand circuit & une plus grande surface. 159

Deux poligones étant inscrits dans le cercle X; je considere la partie *ABDC*, & les parties de ces deux poligones qui y répondent.



1°. *BD* + *DC* est plus grand que *BC*; partant le circuit de celui qui a plus de côtez est déja plus grand.

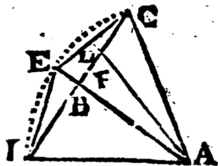
2°. La figure *ABCD* surpasse *ABC* de la grandeur du triangle *BDC*; ainsi le poligone qui a plus de côtez a une plus grande surface ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

354. *Donc puisque de deux ou plusieurs poligones inscrits dans un même cercle, celui là est plus grand qui a plus de côtez, demeurant toûjours*
*S n.147 *plus petit que le cercle* *; il s'ensuit que plus un poligone inscrit a de côtez, plus il approche de la circonference & de la surface du cercle; & quainsi un poligone inscrit, qui a une infinité de côtez, ne differe point du cercle.*

THEOREME XII.

355. *De deux polygones reguliers inscrits dans un même cercle, ou cercles égaux, celui qui a plus de côtez a un plus grand apothême.*



EC est la corde du poligone qui a plus de côtez, *CI* celle de celui qui en a moins; ainsi *CE* étant la corde d'un plus petit arc est plus petite, & par consequent plus éloi-
*L. 1. n. gnée du centre *A* que *CI**.
96. Donc la perpendiculaire *AD* qui est l'apothême du poligone dont *CE* est la corde, est plus grande que *AB* apothême du poligone, dont *CI* est la corde; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

356. *La surface d'un cercle est égale à un triangle qui a pour sa hauteur le rayon du cercle, & pour base la circonference.*

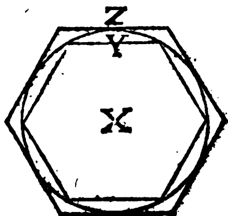
On peut supposer selon les deux Theorêmes précédens & leurs Corollaires, qu'un cercle est égal à un poligone d'une infinité de côtez, qui lui est circonscrit ou inscrit. La surface de ce

poligone est égale à un triangle qui a pour base son circuit, qui est ici la même chose que la circonference du cercle, & pour hauteur l'apothême ou la perpendiculaire menée du centre de ce poligone sur un des côtez de ce même poligone, qui ayant un nombre infini de côtez, cette perpendiculaire n'est point differente du rayon du cercle où il est inscrit. Prenant donc le cercle pour un poligone semblable, sa surface est égale à un triangle, dont la base est égale à sa circonference, & la hauteur est égale à son rayon.

Le rayon d'un cercle se peut mesurer facilement, il n'en est pas de même de sa circonference qu'on ne connoît pas encore. C'est ce qui empêche de trouver la quadrature du cercle, c'est-à-dire, de faire un quarré égal à la surface renfermée dans un cercle : car si on connoissoit cette circonference, on formeroit facilement un triangle égal au cercle, faisant sa base égale à cette circonference, & sa perpendiculaire égale au rayon. Ce triangle, suivant ce qui sera enseigné dans la suite, se changeroit facilement en un quarré qui lui seroit égal, & par consequent audit cercle. Mais on ne peut exprimer la grandeur de la circonference d'un cercle qu'en assignant deux lignes, l'une plus grande & l'autre plus petite que cette circonference, qui ne different entr'elles que d'une grandeur moindre que toute grandeur qu'on puisse marquer ; ce que l'on démontre de cette maniere.

Soit le cercle donné X ; *je suppose qu'un poligone, que je nomme* Z, *lui soit circonscrit, & qu'un autre que j'appelle* Y *lui soit inscrit. La grandeur donnée, qui est la difference de la surface du cercle à une autre surface, est* T.

J'augmente ou diminuë les côtez des poligones Z & Y, jusqu'à ce que leur difference soit plus petite que la grandeur T; ce qui est facile : car en augmentant les côtez de l'un & de l'autre, on augmente la grandeur de Y*, &



S n. 152. on diminuë celle de Z. Ainsi l'un & l'autre approchent plus de la circonference du cercle. La difference de Z avec Y est plus grande que celle de Z avec le cercle X, puisque X est plus grand que Y : donc la difference des surfaces de Z & de Y étant plus petite que la grandeur T, on trouve une surface qui differe de celle du cercle d'une grandeur plus petite que celle qu'on avoit proposée ; c'est-à-dire, que si on proposoit de trouver une surface qui ne differât de celle d'un cercle donné que de la cent milliéme partie d'une ligne, on en pourroit trouver une qui differeroit encore moins.

*S n. 149. & 150.





ELEMENS DE GEOMETRIE.



LIVRE TROISIE'ME.

Les proprietez qui conviennent à toute Grandeur, appliquées aux Lignes, Plans, Solides, & démontrées.

SECTION PREMIERE.

Les quatre Operations de l'Arithmetique, Addition, Soustraction, Multiplication, & Division sur les Lignes, sur les Plans, & sur les Solides.

OPERATION I.



LA premiere & la plus simple proprieté de toute grandeur, & par consequent d'une ligne, d'un plan, d'un solide, c'est de pouvoir être augmentée, ou diminuée. On peut ajoûter une ligne à une ligne,

les joignant, ou les prolongeant. On peut de même ajoûter un plan à un plan en les continuant ou les mettant côte à côte l'un de l'autre. Quand on exprime des grandeurs soit lignes, soit plans, soit solides avec des lettres, le signe de l'Addition est celui-ci +; ainsi *a* + *b* veut dire que les grandeurs qu'on appelle *a* & *b*, nombres ou lignes, sont ajoûtées ensemble. Lorsque la même lettre se trouve repetée plusieurs fois, on ne la marque qu'une seule fois, mais on met devant un chifre, qui signifie combien de fois elle est ajoûtée à elle-même, 3*b* signifie que *b* est ajoûté trois fois à lui-même. Pour ajoûter une grandeur qui a le signe + à la même qui a le signe —, on les efface toutes deux; car plus & moins une même grandeur, ce n'est rien. Ainsi dans une Addition, il faut effacer les mêmes grandeurs qui ont des signes contraires. Dans la Geometrie l'on marque ordinairement une ligne par deux majuscules aux deux extremitéz, comme *AB*, ou par une seule petite lettre qu'on met au milieu. *a*, marque la ligne *AB*.

A ——*a*—— B

OPERATION II.

Soustraction.

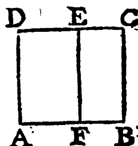
Le signe de la Soustraction est une petite barre; ainsi *a* — *b* marque que l'on conçoit que de *a* on a retranché *b*, & que par consequent *a* étoit plus grand que *b*.

La difference de deux grandeurs; c'est l'excès de la plus grande par dessus la plus petite, ou la plus grande moins la plus petite. Soient deux lignes *AB* & *CD*; ayant pris sur *AB* la ligne *AE* égale à *CD*, leur difference est *EB*,

A ——E—— B
C ——— D

excès de *AB* par dessus *CD*, ou la plus grande ligne *AB* moins la plus petite *CD*; c'est-à-dire, ce qui reste de la plus grande après le retranchement de la plus petite.

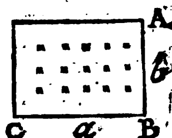
Si l'on retranche du plan *ABCD*, le plan *BCEF*, pour marquer ce retranchement l'on écrit de même *ABCD* — *EBCE*; ce qui sera la difference de ces deux plans. Après ce retranchement, le reste est le plan *ADEF*. La regle générale de la Soustraction est de changer les signes de la grandeur qu'on veut retrancher. On sous-entend toûjours le signe + devant la grandeur qui n'a aucun signe. Ainsi pour ôter *b* de *a*, c'est-à-dire, + *b* de *a*, il faut changer ce + en —, & écrire *a* — *b*.



Operation III.

Multiplication.

Multiplier une grandeur par une autre, c'est prendre l'une, (n'importe par laquelle on commence,) autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre. Multiplier *a* par *b*, c'est prendre *a* autant de fois que *b* a d'unitez ou de parties; ce qu'on marque en unissant ainsi ces deux lettres, *ab*. Il est évident que ce plan est fait par le mouvement de la ligne *b*, müe de *B* à *C*; partant repetée ou prise autant de fois qu'il y a d'unitez ou de parties en *a*. Quand on marque un plan par deux lettres ainsi, *ab*, on suppose que *a* ou *BC* fait un angle droit avec *b* ou *AB*. Nous avons

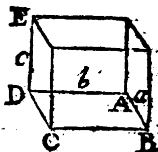


démontré dans le Livre précédent, que la grandeur d'un plan ne dépend pas seulement de la longueur de ses côtez, mais aussi de la nature de l'angle qu'ils font; qu'un parallelogramme rectangle est plus grand * que celui qui ne l'est pas. Il a ainsi une mesure déterminée; C'est pourquoi on suppose, comme je le viens de dire, que deux lignes qu'on conçoit multipliées l'une par l'autre, font un rectangle.

* L. 2. n. 130.

Quand on se sert de petites lettres, leur union est une marque qu'elles sont multipliées l'une par l'autre; mais il n'est pas de même quand on se sert de capitales. Ainsi *AB* ne marque pas que *A* est multiplié par *B*, mais que *AB* est une ligne, dont *A* & *B* sont les extremitez. Le signe de la multiplication de deux lignes marquées avec des capitales est celui-ci ×, qui est une petite croix de S. André, *AB* × *BC*, marque que *AB* est multiplié par *BC*.

Si l'on conçoit que le plan *ABCD* est pris autant de fois, & mis sur soi-même qu'il y a de parties dans *DE*, cela fait un solide *ABCD* × *DE*. Si $AB = a$, & $AD = b$, & $DE = c$, le produit sera abc. Comme l'on marque un plan avec deux petites lettres, on marque le solide avec trois.



OPERATION IV.

Division.

On nomme Dividende la grandeur qu'on propose à diviser; Diviseur, celle par laquelle on divise; Quotient, celle qui exprime combien

de fois le Diviseur est dans le Dividende.

Pour marquer qu'une grandeur est divisée par une autre, on met leurs lettres l'une sous l'autre, & on les sépare par une petite ligne. Pour diviser a par b, on met a sur b, de cette maniere $\frac{a}{b}$, qui marque qu'on conçoit que a est divisé par b. La Division est une espece de Soustraction. Quand on ôte une grandeur toute entiere d'elle-même, il ne reste rien ; Ainsi diviser a par a, c'est ôter a de a autant de fois qu'il y est contenu. Il y est une fois ; ainsi en divisant a par a, il ne doit rien rester : le Dividende & le Diviseur disparoissent ; par consequent leurs lettres qui sont également dans le Diviseur & dans le Dividende doivent être supprimées. Pour diviser cd par c, il faut supprimer c, & laisser d, qui sera le quotient de cd divisé par c; c'est-àdire, que d sera le signe du nombre de fois que c est dans cd. La Division défait ce qu'a fait la Multiplication. Quand on multiplie c par d, on les joint, cd. Divisant donc cd par c, il faut que c ne paroisse plus, & qu'il ne reste que d. S'il falloit multiplier $\frac{cd}{a}$ par a il faudroit effacer a ; c'est-à-dire, que le produit de $\frac{cd}{a}$ par a est cd : car $\frac{cd}{a}$ c'est cd divisé par a, & effaçant a, on rétablit cd; la division défait, & la multiplication refait.

Remarquez que le quotient d'une division étant multiplié par le Diviseur, il produit une grandeur égale à celle qui a été divisée, ce qui est évident : car multiplier le quotient par le Diviseur, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans la grandeur à diviser.

Les mêmes Operations, Addition, Soustraction, Multiplication & Division, lorsque les Grandeurs sont complexes.

5. On dit qu'une grandeur est complexe, lorsqu'elle est composée de deux ou de plusieurs grandeurs, qui sont exprimées chacune par un signe particulier : $a + b$ & $a - b$, sont des grandeurs complexes. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'est rien. $+ 3 - 3$ est égal à zero ; donc pour rendre une expression nette, on efface celles qui se trouvent avec des signes contraires. Ayant par exemple cette expression $5b - 2b$, on la réduit à celle-ci, $3b$. Car comme nous en avons averti, lorsqu'une grandeur n'a point de signe exprimé, il faut sous-entendre le signe $+$; ainsi $5b - 2b$, c'est comme s'il y avoit $+ 5b - 2b$. Or dans cette expression il y a $2b$ avec des signes contraires ; je l'efface donc, & j'écris $+ 3b$, ou simplement, $3b$.

Addition des Grandeurs complexes.

6. Les grandeurs complexes s'ajoûtent comme les simples. Pour ajoûter $b + c$ avec $f + h$; il faut les joindre par le signe $+$ ainsi ; $b + c + f + h$. Il faut toûjours effacer les lettres qui se trouvent avec des signes contraires ; ainsi ajoûtant $b + d$ avec $c - d$, on écrit seulement $b + c$.

Lorsque les mêmes lettres se trouvent repetées plusieurs fois, on n'en met qu'une avec le chifre devant, qui fait connoître combien de

fois elle est prise ; comme ici pour ajoûter $4f + 6g$ avec $3f - 4g$, on écrit : $7f + 2g$. Si l'on avoit marqué cette operation au long, on auroit écrit ; $4f + 6g + 3f - 4g$. Or $4f + 3f = 7f$, & $+ 6g - 4g = + 2g$.

Pour ajoûter de part & d'autre du signe de l'égalité une même grandeur, là où elle se trouve avec le signe $-$, il faut l'effacer, & la mettre de l'autre côté avec le signe $+$. Soit cette égalité $a = b - d$; pour ajoûter d de part & d'autre, j'écris $a + d = b$. L'operation tout au long seroit : $a + d = b - d + d$. Mais $- d + d = 0$.

Soustraction des Grandeurs complexes.

La regle générale de cette operation, est la même que pour les grandeurs simples : il faut changer les signes de la grandeur à retrancher. On doit toûjours sous-entendre le signe $+$ devant toute grandeur, qui n'a aucun signe. Partant pour ôter $b + d$ ou $+ b + d$ de $c + f$, il faut écrire $c + f - b - d$. Car 1°, il faut joindre b avec $c + f$ par $-$, signe de la Soustraction. 2°. Ce n'est pas seulement $+ b$ qu'on veut retrancher, mais encore $+ d$; il le faut donc écrire ainsi $- d$. Au contraire, pour ôter $b - d$ de $c + f$, il faudroit changer les signes de $+ b - d$, mettant $c + f - b + d$. Car quand on soustrait $b - d$ de $+ f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b ; il s'en faut la grandeur d. Ainsi ayant mis $c + f - b$, on retranche de $c + f$ plus qu'il ne faut retrancher, sçavoir la grandeur d ; c'est pourquoi on l'ajoûte à $c + f$ en cette maniere, $c + f - b + d$. 71

Remarquez bien que dans cette expression

$c+f-b-d$, ce n'est pas de b que d est retranché; mais b & d sont retranchez de $c+f$.

Quand on a à soustraire de part & d'autre du signe de l'égalité une même grandeur; il n'y a qu'à l'effacer où elle se trouve avec le signe $+$; & la mettre de l'autre côté avec le signe $-$. Soit $a=b+d$; pour ôter d de part & d'autre, j'écris: $a-d=b$.

Multiplication des Grandeurs complexes.

Les questions sur la multiplication des Grandeurs complexes, se réduisent à ces trois. 1°. Multiplier nne ligne, plus une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne: comme $a+b$ par $f+g$. 2°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne, plus une autre ligne; comme $a-b$ par $f+g$. 3°. Multiplier une ligne moins une autre ligne, par une ligne moins une autre ligne.

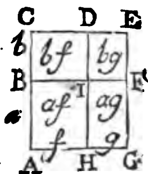
Regles pour ces trois cas.

Regle I.

Lorsque les deux grandeurs données à être multipliées l'une par l'autre, ont chacune le signe $+$, leur produit doit avoir le même signe $+$.

Pour multiplier $a+b$ par $f+g$; il faut commencer l'operation par multiplier a par f, écrivant af, ce qui est le signe du produit de a par f. Faisant de même autant de multiplications partiales qu'il y a ici de lettres, on aura $af+bf+ag+bg$, pour produit de $a+b$ par $f+g$. Pour rendre la chose sensible, soit

$a+b = AC$. Soit $a = AB$, & $b = BC$. Soit aussi $f+g = AG$, & $f = AH$ & $g = HG$. Je suppose que $ACEG$ est un rectangle coupé par des paralleles, qui font les parallelogrammes, $ABIH$, $FGIH$, $BCDI$, $DEFI$, ausquels parallelogrammes est égale leur somme $ACEG$. Le tout est égal à ses parties. Or ces quatre produits $af + bf + ag + bg$ sont égaux à ces quatre parallelogrammes, comme il est évident : ils sont donc égaux à $AC \times AG$; c'est-à-dire, au parallelogramme de AC par AG, ou de $a+b$ par $f+g$.

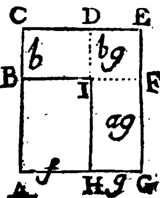


REGLE II.

Plus en moins, ou moins en plus donne un produit, qui doit avoir le signe —.

C'est-à-dire, que si l'une des deux grandeurs a le signe —, & l'autre le signe +, leur produit doit avoir le signe —. Suivant cette Regle, pour multiplier $a+b$ par $f-g$, je multiplie 1° $a+b$ par f, ce qui fait $af+bf$; mais comme ce n'étoit pas par toute la valeur de f qu'il falloit multiplier $a+b$, qu'il s'en falloit la valeur de g, ce produit $af+bf$ est trop grand de la valeur de g, multipliant $a+b$, c'est-à-dire, de $ag+bg$. J'ôte donc ce que j'avois mis de trop, & l'expression sera $af+bf-ag-bg$.

Soit $a = AB$ ou HI. $b = BC$ ou ID. $g = HG$ ou IF, & $f = AG$. Ainsi $a+b = AC$, & $f-g = AH$; donc $af = AB \times AG$; & $bf = BC \times BF$. Il faut démon-

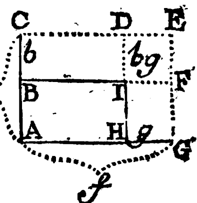


trer que $af + bf - ag - bg = ACDH$, ou que $ACDH = ACEG - FGHI - DEFI$; ce qui est évident.

REGLE III.

Moins en moins donne plus.

Multipliant ces deux grandeurs complexes l'une par l'autre; $a - b$, & $f - g$, leur produit est $af - bf - ag + gb$, où vous voyez qu'on marque le produit de $-g$ par $-b$ avec le signe $+$. Il faut prouver que cela est bon.



Soit $a = AC$, & $b = BC$. Ainsi $a - b = AB$. Soit aussi $f = AG$, & $g = HG$; ainsi $f - g = AH$. Pour démontrer ce qui est en question, considerez que $ABIH$ est égal à $AGEG$, ou af. si l'on en retranche 1°, $DEGH$, ou ag, & $BCEF$ ou bf, pourveu qu'on lui rajoûte $DEFI$, ou bg, qu'on lui ôte de trop; car en ôtant $DEGH$, & $BCEF$, on ôte deux fois $DEFI$, ou bg. Ainsi $af - bf - ag + bg$ est le produit de $a - b$ par $f - g$. Moins en moins donne donc plus, c'est-à-dire, qu'à la fin du produit le signe $+$ se doit trouver; parce qu'ayant trop ôté, il faut remettre ce qu'on ôtoit de trop.

Division des Grandeurs complexes.

La regle generale de la Division, soit des Grandeurs complexes, soit des Grandeurs incomplexes est de mettre le dividende au dessus d'une ligne, & le diviseur dessous. Ainsi pour

diviser $ax + cd$ par $xd + cb$, j'écris $\frac{ax + cd}{xd + cb}$.

On a vû que dans les incomplexes il faut effacer les mêmes lettres qui se trouvent dessus & dessous; il le faut faire aussi dans les complexes, lorsqu'elles se trouvent dans chaque partie du dividende & du diviseur. Cette expression $\frac{ax + dx}{bx + cx}$ se peut donc réduire à celle-ci plus simple, $\frac{a + d}{b + c}$, qui est d'égale valeur.

Comme la division défait ce que la multiplication a fait, les trois regles qu'on vient de donner de la multiplication font connoître en voyant les signes d'un quotient, quels signes peuvent avoir le dividende & le diviseur, 1°, si tous deux ont le signe +; 2°, si l'un a +, & l'autre —; 3°, si tous deux ont le signe —.

AVERTISSEMENT.

En voila assez pour entendre la suite de ces Elemens de Geometrie; mais pour pratiquer avec plus de facilité cette maniere d'Arithmetique par lettres, ce qui s'appelle Algebre, il faut lire les Elemens des Mathematiques.



SECTION II.

De la puissance des Lignes.

En multipliant une grandeur, on l'éleve comme par degrez, selon qu'on la multiplie. On nomme Puissances, ces degrez.

DEFINITION I.

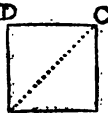
20 *Premiere puissance d'une ligne, c'est la ligne même sans être multipliée.*

DEFINITION II.

21 *Seconde puissance, ou quarré d'une ligne, c'est son produit, étant multipliée par elle-même.*

La seconde puissance de b est bb, ou b^2. Ce nombre 2, marque les deux dimensions de bb. Remarquez qu'il y a bien de la difference entre b^2 & $2b$; car cette seconde expression, $2b$, marque que b a été ajoûté à lui-même; au lieu que b^2, fait connoître que c'est un quarré, ou que b est multiplié par lui-même. Or cela est bien different; car par exemple, 3 & 3 ou 3 ajoûté à lui-même, ne fait que 6; au lieu que 3 fois 3 ou 3 multiplié par lui-même, fait 9.

Lorsqu'on marque une ligne avec deux lettres capitales A & B à ses extrémitez, son produit, ou sa seconde puissance, qui est le quarré $ABCD$, se marque avec ces quatre letres, ou par deux seulement, qui sont aux extrêmitez de la diagonale, comme font ici A & C, écrivant AC. Ou on joint la même ligne AB avec elle-même par une petite croix de saint André, qui est le signe



de la multiplication, ainsi, $AB \times AB$, ou enfin on tire une ligne sur AB, & on y ajoûte le signe de la seconde puissance, de cette maniere, $\overline{AB}^2$. Ainsi $\overline{MN}^2$ est un quarré dont MN est le côté, ou qui est faite de MN multiplié par MN.

AVERTISSEMENT.

Euclide, & les anciens Geometres prenoient le quarré pour la premiere puissance, qui dans le langage des nouveaux Geometres est la seconde. Une grandeur réelle avant que d'être multipliée par elle-même, ou par une autre, a une valeur, ou une puissance.

DE'FINITION III.

On appelle racine d'une puissance, la ligne de la multiplication de laquelle s'est fait cette puissance. 12

La racine quarrée de bb ou de b^2, est une ligne égale à b, c'est-à-dire, au côté d'un quarré égal à bb.

AVERTISSEMENT.

Lorsque la racine d'une puissance ne se peut exprimer par un nombre ; ce qui arrive en certaines occasions, comme on le démontrera, on met devant elle ce signe $\sqrt{}$ avec la marque de la puissance ; ainsi, $\sqrt{2}$, si c'est une racine quarrée ; $\sqrt{3}$, si c'est une racine cube.

DE'FINITION IV.

Le cube, ou la troisiéme puissance d'une ligne, c'est le produit qu'elle fait, lorsqu'elle multiplie son quarré. 13

Le quarré de b est bb. Si l'on multiplie bb par b, ce qui fait bbb, ce solide ou cube est la troisiéme puissance de la ligne b. Ce cube bbb se peut exprimer ainsi, b^3. Ce nombre 3, en marque les trois dimensions. b^3 est different de $3b$;

car $3b$, c'est b, pris par trois fois, & b^3, est multiplié une premiere fois par lui-même, ce qui produit son quarré bb ou b^2; & en second lieu, ce quarré est multiplié par b, ce qui fait bbb, ou b^3. Prenant 3 fois ce nombre de 4, cela fait 12. Mais prenant le quarré de 4, qui est 16, & le multipliant par sa racine, qui est 4, cela fait 64.

Lorsqu'une ligne comme *A B* est marquée par deux lettres capitales à ses extrémitez, on peut exprimer ainsi sa troisiéme puissance ou son cube: $AB \times AB \times AB$, ce qui fait connoître qu'on a multiplié 1°, *AB* par *AB*, ce qui fait le quarré de *AB*; 2°, qu'on a multiplié ce quarré de *AB* par *AB*, racine de ce quarré. On a abregé cette expression en mettant sur *AB* une ligne avec le petit chifre, qui marque le nombre de ses dimensions; $\overline{AB}^3$ est le cube de *AB*.

Définition V.

14 *Toute grandeur faite du produit de deux autres, s'appelle Plane.*

Ainsi *bd* est une grandeur plane, ou un plan; dont une de ces lettres marque la largeur, & l'autre la longueur, c'est-à-dire, ses deux dimensions; $AB \times BC$ est une grandeur plane, ou un plan.

Définition VI.

15. *Toute grandeur faite du produit de trois autres, s'appelle Solide.*

Ainsi *bcd* est un solide, dont ces trois lettres marquent les trois dimensions. Le produit de deux de ces lettres en marque le plan ou la surface, & la troisiéme marque la hauteur, ou l'épaisseur par laquelle le plan a été multiplié.

Avertissement.

Par quelque ordre que l'on multiplie deux

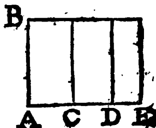
grandeurs, le produit est toûjours égal. ab *&* ba *sont le même plan. Il en est de même de trois ou de plusieurs lignes :* abc, bca, cab, *par quelque ordre qu'on les multiplie, le produit est le même. Dans Euclide, ce mot rectangle signifie un plan dont les angles sont droits. Nous supposons que les plans & les solides dont nous allons parler, sont tous rectangles.*

Remarquez aussi que comme il est d'un très-grand avantage d'accoûtumer promptement son esprit à ces sortes de calculs, pour la formation des quarrez & des rectangles, on supprimera exprès les figures dont Euclide & ses Interpretes se servent ordinairement pour les démonstrations de plusieurs des premieres Propositions suivantes, & il est à propos de faire actuellement ces calculs la plume en main.

PROPOSITION I.

Si de deux lignes droites, l'une est coupée en tant de parties que l'on voudra ; les rectangles compris de la non-coupée, & de chacune des parties de la coupée, sont égaux au rectangle des deux toutes. Eucl. II. Prop. 1. 171

Soient *AE* & *AB* deux lignes droites. *AE* est coupée en ses parties *AC*, *CD*, *DE*. La ligne *AB* n'est point coupée ; il faut prouver que le rectangle des toutes *AB* & *AE* est égal aux rectangles faits de la toute *AB*, & de chacune des parties de *AE* ; c'est-à-dire, que $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$.



Les parties étant égales à leur tout, *AE* est la même chose que $AC + CD + DE$. Par conséquent c'est la même chose de multiplier

AB par *AE* ou par $AC + CD + DE$. Donc $AB \times AE = AB \times AC + AB \times CD + AB \times DE$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

18 *Si une ligne droite est coupée comme l'on voudra, les rectangles compris de la toute, & de chacune de ses parties, sont égaux au quarré de la toute.* Eucl. II. Prop. 2.

Soit la ligne *AB* coupée en deux parties au point *C*. Soit $AB = a$ & $AC = b$, & $BC = d$. Le tout étant égal à ses parties $a = b + d$. Donc multiplier *a* par *a*, & multiplier *a* par $b + d$, c'est faire la même chose ; & par conséquent $aa = ab + ad$. C'est à dire que le quarré de la toute *AB* ou *aa*, est égal aux rectangles faits de la toute *AB*, & de ses parties *AC* & *CB* ; ce qu'il falloit prouver.

A C B

PROPOSITION III

19 *Si on divise une ligne comme on voudra en deux parties, le rectangle de la toute & de l'une de ses parties, est égal au rectangle des deux parties plus le quarré de la partie premierement prise.* Eucl. II. Prop. 3. *même figure.*

Soit la ligne *AB* divisée en deux parties, telles qu'on voudra au point *C*, il faut démontrer
3. n. 11 que $AB \times AC = AC \times BC + \overline{AC}^2$.
Soit $AB = a$, & $AC = b$, & $BC = d$. Ainsi comme $AC + CB = AB$, de même $a = b + d$. Multipliant donc *a* & $b + d$ par le même multiplicateur *b*, les produits seront égaux. $ab = bd + bb$. Or *ab*, est le rectangle de *AB* par *AC* & $bd + bb$ est le rectangle fait des parties *b* & *d*, plus le quarré de la partie *b*

premierement

premierement prise ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

Si on divise une ligne comme on voudra en deux parties, je dis que le quarré de toute la ligne est égal au quarré de chaque partie, & à deux fois le rectangle fait d'une partie par l'autre. Eucl. II. Prop. 4. 20.

Soit la ligne AB divisée en deux parties au point D. Il faut prouver que $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + 2AD \times DB + \overline{DB}^2$.

A D B

Soit $AD = b$, & $DB = d$. Donc $AB = b + d$. Or le quarré de $b + d$, c'est $b^2 + 2bd + d^2$*. Mais $\overline{AD}^2 = bb$ & $\overline{DB}^2 = dd$, & $2AD \times DB = 2bd$. Donc $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$; ce qu'il falloit prouver. * § n. 8.

PROPOSITION V.

Si l'on divise une ligne en deux parties égales, & en deux parties inégales, le rectangle fait des parties inégales, plus le quarré de la partie du milieu sont égaux au quarré de la moitié de la ligne. Eucl. II. Prop. 5. 21.

La ligne AB est divisée également en C, & inégalement en D. Je dis que $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$.

A C D B

Soit AC ou $CB = a$ & $CD = b$. Donc $DB = a - b$ & $AD = a + b$. Or le rectangle de $a + b$ par $a - b$ est $aa + ab - ab - bb$*. Mais $+ ab - ab = 0$; donc ce rectangle est $aa - bb$. Par consequent $AD \times DB = aa - bb$. Donc ajoûtant de part & * § n. 8.

d'autre *bb* ou $\overline{CD}^2$ égal à *bb*, cela fera $AD \times DB + \overline{CD}^2 = aa$; ce qu'il faut prouver.

Pour ajoûter *bb* à $aa - bb$, il ne faut que supprimer $-bb$; car il est évident que $aa - bb$
* 5 n. 6. $+ bb = aa$. Ainsi qu'il a été expliqué*.

Proposition VI.

12. *Si une ligne droite est coupée par la moitié, & qu'on lui ajoûte directement une autre ligne droite, le rectangle compris de la toute & de l'ajoûtée, comme d'une seule ligne & de l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié de la toute, sont égaux au quarré de la moitié de la toute & de l'ajoûtée comme d'une seule ligne.* Eucl. II. Pr. 6.

La ligne *AB* est coupée par la moitié au point *C*. On lui a ajoûté directement la ligne droite *BD*. Il faut démontrer que $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$.



Soit *AC* ou $CB = b$. Donc $AB = 2b$, & $\overline{BC}^2$ ou $\overline{AC}^2 = bb$. Soit $BD = d$. Donc $CD = b + d$, & $2b + d = AD$. Partant $AD \times BD = 2bd + dd$; & $AD \times BD + \overline{BC}^2 = 2bd + dd + bb$. Or le quarré de *CD* ou de
* 5 n. 8. $b + d$ est $bb + 2bd + dd$*; Ainsi $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$; ce qu'il falloit prouver, sçavoir que le rectangle de $AD \times BD$, plus le quarré de *AC* ou *BC* étoient égaux au quarré de *CD*.

Proposition VII.

13. *Si on coupe une ligne comme on voudra, le quarré de la toute & celui de l'une des parties*

sont égaux au quarré de l'autre partie & à deux rectangles faits de la toute, & de la partie premierement prise. Eucl. II. Prop. 7.

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, au point C. Il faut démontrer que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AB \times BC + \overline{AC}^2$.

Soit $AC = b$. Donc $\overline{AC}^2 = bb$. Soit $BC = d$; donc $\overline{BC}^2 = dd$. De même puisque $AB = b + d$, donc * $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$; & $AB \times BC = bd + dd$. Doublant ces deux grandeurs $2AB \times BC = bd + 2dd$, & leur ajoûtant $\overline{AC}^2$ ou bb, viendra $2AB \times BC + \overline{AC}^2 = 2bd + 2dd + bb$, & consequemment égal à $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; ce qu'il falloit démontrer. * § n. 8.

B C A

PROPOSITION VIII.

Si une ligne droite est coupée en deux parties comme l'on voudra, quatre fois le rectangle compris de la toute, & de l'une de ses parties, avec le quarré de l'autre partie, sont égaux au quarré de la toute & de la partie premierement prise comme d'une seule ligne. Euclid. II. Proposit. 8. *Même figure.* 24.

La ligne AB a été coupée, comme on a voulu, en deux parties au point C. Il faut démontrer que $4AB \times BC + \overline{AC}^2$ est égal au quarré d'une ligne égale à $AB + BC$.

Soit $AC = b$, & $BC = d$. Donc $AB = b + d$, & $AB + BC = b + d + d$, ou $b + 2d$, dont le quarré est $bb + 4bd + 4dd$*, qui sera égal à celui de la ligne $AB + BC$. Or $AB \times BC = bd + dd$, puisque AB vient * § n. 8.

d'être posé $= b + d$, & $CB = d$: donc $4AB \times BC = 4bd + 4dd$, ajoûtant d'une part $\overline{AC}^2$,

B C A

& de l'autre son égal bb, on aura $\overline{AC}^2 + 4AB \times BC = bb + 4bd + 4dd$, qui est la même valeur qu'on vient de trouver pour le quarré de la ligne $b + 2d = AB + BC$; ainsi le quarré de $AC + 4AB \times BC$ sont égaux au quarré de la ligne $AB + BC$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION IX.

25. *Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & en deux inégales ; les quarrez des deux parties inégals sont le double du quarré de la moitié de la toute & du quarré de la partie du milieu.* Eucl. II. Prop. 9.

La ligne AB est coupée en deux parties égales en C, & en deux inégales en D. Il faut prouver que $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$ est double de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$.

A C D B

Soit AC ou $CB = b$. Soit $CD = d$. Donc $AD = b + d$, & $DB = b - d$.

* 7 n. 8. Ainsi $\overline{AD}^2 = bb + 2bd + dd$*; & $\overline{DB}^2 = bb - 2bd + dd$; & $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = bb + 2bd + 2dd - 2bd$. Et puisque $+ 2bd - 2bd$ ne font rien, donc $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2bb + 2dd$; ce qui est le double de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$: ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION X.

26. *Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & qu'on lui ajoûte directement une autre ligne droite, le quarré de la toute & de l'ajoûtée*

comme d'une seule ligne, avec le quarré de l'ajoûtée, sont doubles du quarré de la moitié de la toute, & du quarré de ladite moitié & de l'ajoûtée, comme d'une seule ligne. Euclid. II. Prop. 10.

La ligne *A B* est coupée par la moitié au point *C*; & on lui a ajoûté la ligne *B D*. Il faut démontrer que le quarré de *AB* + *BD*, plus celui de *B D* sont le double de celui de *B C* & de *CD*; c'est-à-dire, que $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ est égal à $2\overline{BC}^2 + 2\overline{CD}^2$.

Soit *A C* ou *B C* $= b$.

A C B D

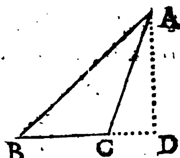
Donc $\overline{BC}^2 = bb$, & $AB = 2b$; donc $\overline{AB}^2 = 4bb$. Soit $BD = d$; donc $AD = 2b + d$, & $\overline{AD}^2 = 4bd + 4bd + dd$. Donc le quarré de *A B* + *B D*, avec le quarré de *BD* est égal à $4bb + 4bd + 2dd$. Or le quarré de *B C* ou bb avec celui de *B C* + *B D*, ou $b + d$, est $2bb + 2bd + dd$, moitié de $4bb + 4bd + 2dd$; ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XI.

Dans tout triangle ambligone le quarré du côté qui est la base de l'angle obtus, est égal aux quarrez faits sur les deux autres côtez; plus deux fois le rectangle du côté sur lequel tombe la perpendiculaire (hauteur du triangle) & du prolongement de ce côté jusqu'à cette perpendiculaire. Eucl. II. Prop. 12. 27r.

Je suppose que le triangle *ABC* est ambligone, que l'angle *A C B* est obtus; & que *A D* hauteur du triangle *A B C* tombe perpendiculairement sur le côté *B C* prolongé. Ce qui étant, il faut démontrer que le quarré de *A B*,

base de l'angle obtus ACB, est égal aux quarrez des deux autres côtez AC & BC, plus deux fois le rectangle fait du côté BC & de son prolongement, compris entre l'angle obtus C & la perpendiculaire AD; ce qui s'exprime ainsi: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.



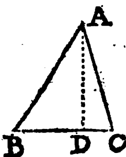
* L. 2. n. 142. L'angle ADB étant droit * $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$. Et par la même raison $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$. Mais $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CD$
* S n. 20. $+ \overline{CD}^2$ *. Substituant donc cette grandeur en la place de $\overline{BD}^2$; & en la place de $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ la grandeur égale $\overline{AC}^2$, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$; ce qu'il falloit prouver.

Proposition XII.

28. *Dans tout triangle oxigone ou acutangle, le quarré d'un de ses côtez est égal aux quarrez des deux autres côtez moins deux fois le rectangle fait d'un desdits autres côtez, & d'une de ses parties comprise entre la perpendiculaire qui la coupe, & l'angle opposé au côté premierement pris.* Eucl. II. Prop. 13.

Je suppose que le triangle ABC est oxygone, que AD est une perpendiculaire qui tombe sur le côté BC; il faut démontrer que le quarré de AB est égal aux quarrez des deux autres côtez AC, & BC moins deux fois le rectangle fait du côté entier BC, & de sa partie CD comprise entre la perpendiculaire AD & l'angle C opposé au côté AB premierement pris; il faut ainsi démontrer $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.

L'angle ADC étant droit $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ *. Otant $\overline{CD}^2$ de de part & d'autre, vient $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$. Cette soustraction se fait comme on l'a enseigné, effaçant $\overline{CD}^2$, où il étoit avec le signe $+$, & l'écrivant de l'autre côté avec le signe $-$.



* L. 1. nr 142.

Puisque ADB est droit ; donc * $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$. Or $BD = BC - CD$. Le quarré de $BC - CD$ est $\overline{BC}^2 - 2BC \times CD + \overline{CD}^2$. Ainsi $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - 2BC \times CD + \overline{CD}^2$. Mettant donc à la place de $\overline{AD}^2$ & $\overline{BD}^2$ les grandeurs qui leur sont égales, on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD + \overline{CD}^2$. (Et comme $- \overline{CD}^2 + \overline{CD}^2 = 0$.) $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$; ce qu'il falloit démontrer.

* L. 2. nr 142.

SECTION III.

Des raisons & proportions des Lignes, des Surfaces & des Solides.

Avertissement.

On peut considerer ce qu'une ligne est en elle-même, ou ce qu'elle est par rapport à d'autres ; lequel rapport fait qu'on dit qu'elle est égale ou inégale, petite ou grande. il en est de même des surfaces, & des solides.[1] *Or on peut rapporter une ligne à une autre, & les comparer differemment, considerant ou l'excès de*

l'une par dessus l'autre, c'est à-dire, leur difference ou la maniere dont l'une contient l'autre ; ce qui fait deux sortes de rapports. Les Geometres ne considerent guére que le second. Aussi lui donnent-ils le nom de Raison, qui en général signifie rapport. C'est des raisons ou de la seconde sortes de rapport que nous allons parler.

Autrefois les Interpretes d'Euclide définissoient les raisons, une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une avec l'autre selon la quantité. *L'on ne compare les choses entr'elles, que lorsqu'elles sont de même genre ; car on ne compare pas la longueur avec la chaleur. Quand on parle de la raison de deux choses, c'est donc leur quantité ou grandeur que l'on compare. Mais le mot d'*habitude *étoit employé ici mal-à-propos.*

Le terme Grec dont Euclide s'est servi, & qu'ils traduisent habitude, *signifie maniere d'être d'une chose à l'égard d'une autre ; & c'est ce que signifie dans la Geomerie le mot de Raison ; mais comme je l'ai dit, c'est de la seconde sorte de rapport qu'il s'agit ; ce que vous allez voir dans les Définitions suivantes.*

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

29. *Raison d'une ligue à une ligne, d'un plan à un plan, d'un solide à un solide ; c'est la maniere dont une ligue contient ou est contenuë dans celle avec qui on l'a compare ; qu'un plan contient, ou est contenu dans un plan ; un solide contient ou est contenu dans un solide, avec lequel on le compare.*

C'eſt par la diviſion qu'on connoît la maniere qu'une grandeur eſt contenuë dans une autre grandeur. Ainſi pour exprimer le rapport, ou la raiſon d'une ligne à une autre, comme de la ligne *A* à la ligne *B* on diviſe *B* par *A*, écrivant comme on l'a marqué l'une ſous l'autre, $\frac{B}{A}$ ou $\frac{A}{B}$. Cette expreſſion expoſe ou exprime la raiſon de *A* à *B*, c'eſt-à-dire, combien de fois, & de quelle maniere *A* eſt dans *B*, ou quelle partie *B*, eſt de *A*; ce qui ſe nomme l'Expoſant de la raiſon de *A*, à *B*.

DEFINITION II.

Une raiſon dont l'expoſant ſe peut exprimer en nombres, s'appelle Raiſon de nombre à nombre. 304

L'expoſant marque la maniere qu'une grandeur eſt contenuë dans une autre, ou qu'elle la contient; c'eſt-à-dire, en termes d'Arithmetique, quel eſt le quotient de la diviſion de ces deux grandeurs l'une par l'autre. Si cet expoſant ou ce quotient eſt un nombre, que par exemple la ligne *B* ſoit en *A* ſix fois, la raiſon de ces deux lignes *A* & *B* eſt une raiſon de nombre à nombre.

DEFINITION III.

Une raiſon dont l'expoſant ne ſe peut exprimer par aucun nombre, ſe nomme Sourde ou Irrationelle. 315

Si on ne peut trouver aucun nombre qui marque exactement combien de fois la ligne *A* contient ou eſt contenuë dans la ligne *B*, la raiſon de ces deux lignes *A* & *B* eſt ſourde: On démontrera dans la ſuite qu'il y a de telles raiſons.

DEFINITION IV.

32. *L'égalité des raisons se nomme Proportion.*

S'il y a même raison de *A* à *B* que de *C* à *D*, on dit de ces quatre grandeurs qu'elles sont proportionelles; ce qu'on marque ainsi:

A. B : : *C. D.*

On a dit que la raison de *A* à *B* s'exprime de cette maniere $\frac{A}{B}$; ainsi celle de *C* à *D* de la même facon $\frac{C}{D}$. Par consequent la proportion de ces quatre lignes, qui consiste dans l'égalité de leurs raisons, se peut aussi exprimer de cette maniere :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

DEFINITION V.

33. *Le premier terme d'une raison se nomme l'Antecedent, l'autre terme le Consequent.*

L'antecedent c'est la chose qui est rapportée, ou comparée; le consequent celle avec qui se fait la comparaison. Toute comparaison suppose deux termes. La raison qui est un rapport ou comparaison, demande donc deux termes.

DEFINITION VI.

34. *Une proportion à deux antecedens, & deux consequens.*

La proportion est une égalité de raisons qu'on compare. Chaque raison suppose deux termes. La proportion en demande donc quatre.

DEFINITION VII.

35. *Le même terme dans une proportion peut servir*

de consequent & d'antecedent ; & quand cela est, cette proportion se nomme Continuë.

Si *A* est à *B* comme *B* à *C*, cela fait deux raisons égales, & par consequent qui font cette proportion.

A. B :: *B. C.*

Or *B* sert dans cette proportion de consequent à la premiere raison, & d'antecedent à la seconde raison. Cette proportion se marque ainsi :

∺ *A. B. C.*

On nomme cette proportion Continuë, à cause que les lettres qui la marquent sont de suite, sans interruption.

DEFINITION VIII.

Une proportion continuë quand elle a plus de trois termes, s'appelle progression. 36.

Si *A* est à *B* comme *B* à *C*, & *B* à *C* comme *C* à *D*, & *C* à *D* comme *D* à *E*, & de suite ; cela s'appelle Progression, qu'on exprime ainsi :

∺ *A. B. C. D. E.* &c.

DEFINITION IX.

Lorsque d'un côté il y a un certain nombre de grandeurs, trois d'une part par exemple & autant de l'autre ; sçavoir trois. Si en les comparant toutes six, 1°, la premiere avec la seconde, & la quatriéme avec la cinquiéme ; 2°, la seconde avec la troisiéme, & la cinquiéme avec la sixiéme, on les trouve en proportion, on dira que cette proportion est ordonnée. 37.

Soient *A. B. C* d'un côté, & *D. E. F* de l'autre. Si *A. B* :: *D. E* & *B. C* :: *E. F*, cette proportion sera ordonnée.

DEFINITION X.

Trois grandeurs étant d'un côté & trois d'un 38.

autre. Si en comparant la premiere avec la seconde, & la cinquiéme avec la sixiéme, elles sont en proportion : & qu'en changeant d'ordre on compare la seconde à la troisiéme, & la quatriéme à la cinquiéme & qu'elles soient encore en proportion, alors cette proportion s'appelle Troublée.

Soient { *A.* B. C / 12 8 4 } & { D. *E.* F / 12 6 4.

Si *A.B* :: *E.F* & B. C :: D. *E*, cette proportion se nomme Troublée, à cause qu'on n'y garde pas le même ordre.

Definition XI.

39. *Le premier & le dernier terme d'une proportion, s'appellent les Extrêmes de cette proportion : & le second & le troisiéme, les termes Moyens.*

Soit cette proportion *A. B* :: *C. D*; les extrêmes sont *A* & *D*; & *B* & *C* les moyens.

Definition XII.

40. *Les termes Omologues d'une proportion sont ceux qui tiennent le même rang, ou qui sont de même nom.*

Dans cette proportion *A. B* :: *C. D*, les termes *A* & *C* qui sont les antecedens, & *B* & *D* qui sont les consequens, sont termes Omologues.

Propositions évidentes touchant les Raisons & les Proportions.

Proposition I.

Les raisons égales ont des exposans égaux.

41. L'exposant d'une raison marque la maniere

que l'un de ces termes est contenu dans l'autre. Si les manieres sont égales, les exposans sont égaux.

PROPOSITION II.

Les grandeurs égales ne peuvent être les exposans que de raisons égales. 424

Soit X l'exposant de la raison de *A* à B, & de la raison de C à D; ces deux raisons doivent être égales, puisque l'une contient l'autre de la même maniere.

LEMME.

Le premier terme d'une raison devient égal au second, quand on le multiplie par l'exposant de cette raison. 431

Soit *A* le premier terme ou l'antecedent de la raison de *A* à *B*. L'exposant de cette raison, ou ce qui est la même chose le quotient de la division de ces termes l'un par l'autre soit *q*, il marque combien de fois *A* est dans *B*, ou quelle partie B est de *A*. Par consequent étant pris autant de fois qu'il y est contenu, c'est-à-dire, étant multiplié par *q*, * il doit devenir égal à *B* * 3 n. 4. qu'il a divisé. Ainsi $Aq = B$; ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE.

Je suppose presque toûjours dans la suite, que ce sera l'antecedent qui sera plus petit. Ainsi l'ayant nommé A *&* *le consequent* B, *je dirai que* $Aq = B$; *quoique s'il en étoit au contraire, & que l'antecedent* A *fût plus grand que le consequent* B, *il soit également vrai de dire, que le terme* A *multiplié par l'exposant de* A *à* B *produira toûjours le consequent* B, *puisque l'exposant peut marquer également la maniere de contenir ou d'être contenu, soit que la raison soit*

sourde ou de nombre à nombre. Ainsi lorsque l'antecedent A est pluspetit que le consequent B, l'exposant de cette raison sera plus grand, que l'unité ; & au contraireplus petit (ce qu'on nomme Arithmetiquement une fraction) lorsque l'antecedent est plus grand que le consequent. Mais de quelque maniere que la proportion soit ordonnée, le premier terme multipliant l'exposant de sa raison au second, il produira toûjours ledit second terme qu'il avoit divisé.

PROPOSITION III.

44. *Quatre termes demeurent en proportion, quelque changement qu'on y fasse, pendant que le premier antecedent est à son consequent, comme le second antecedent, est à son consequent ;* C'est la définition même de la proportion.

PROPOSITION IV.

45. *Quatre grandeurs étant proportionnelles*, permutando, *c'est-à-dire, les changeant & faisant que les antecedens deviennent les consequens, elles seront encore proportionnelles.*

Si *A. B* :: *C. D*, il faut prouver que *B. A* :: *D. C.*

Contenir & être contenu, sont des termes reciproques. Ainsi si *A* contient *B*, comme *C* contient *D*, & par consequent qu'il y ait égalité de raisons, il faut que *B* soit contenu dans *A*, comme *D* est contenu dans *C*, & qu'ainsi il y ait encore égalité de raisons. Quand on tire une consequence de cette proportion, cela s'appelle conclure *permutando*, ou par raison inverse.

PROPOSITION V.

46. *Quatre grandeurs étant proportionelles*, alternando, *c'est-à-dire, en comparant le premier*

antecedent avec le second antecedent, & le premier consequent avec le second consequent, ces quatre grandeurs seront encore proportionnelles. Eucl. V. Prop. 16.

Soit cette proportion *A. B* :: *C. D*. Il faut prouver qu'*alternando A. C* :: *B. D*. Supposant que *q* est l'exposant de ces deux raisons * $Aq = B$, & $Cq = D$. Donc au lieu de *A. B* :: *C. D*, je puis écrire *A. Aq* :: *C. Cq*. Il faut donc prouver qu'*alternando A. C* :: *Aq. Cq*; ce qui est évident : puisque le quotient de *C* divisé par *A* est $\frac{C}{A}$, le même que celui de *Cq* divisé par *Aq*, qui est $\frac{Cq}{Aq}$. Or selon les regles de la Division*, on peut effacer *q* qui est au dessus & au-dessous de la ligne, après quoi il ne reste que $\frac{C}{A}$; Ainsi ces deux raisons ayant un même exposant; sont égales.

* § n. 43
* § n. 41

PROPOSITION VI.

47. *Ajoûtant aux deux termes d'une raison deux autres termes de même raison à l'antecedent de la premiere l'antecedent de la seconde, au consequent de la premiere le consequent de la seconde, la même raison demeure.*

Soit cette proportion *A. B* :: *C. D*, il faut prouver que $A + C$. $B + D$ :: *A. B*. L'exposant des raisons de *A* à *B* & de *C* à *D* est *q*. Ainsi* $Aq = B$, & $Cq = D$. Il faut donc prouver que $A + C$. $Aq + Cq$ :: *A. B*.

Le quotient de $Aq + Cq$ divisé par $A + C$, est *q* *. Donc ces deux termes $A + C$ & *Aq*

* § n. 43
* § n. 41

$+Cq$ ayant un même exposant que A & Aq ; ou que A & B, ils ont la même raison*.

* § n. 41.

PROPOSITION VII.

48\. *Retranchant des deux termes d'une raison deux autres termes de même raison, l'antecedent de l'antecedent, le consequent du consequent, la même raison demeure.*

Soit cette proportion $A. B :: C. D$, il faut prouver que $A - C. B - D :: A. B$. Si l'exposant de ces raisons est q : donc $Aq = B$ & $Cq = D$*. Il faut ainsi prouver que $A - C. Aq - Cq :: A. B$. Or le quotient de $Aq - Cq$ divisé par $A - C$ est q : donc ces deux termes ont le même exposant, & partant la même raison que A & B.

* § n. 43.

PROPOSITION VIII.

49\. *Quatre grandeurs étant en proportion*, componendo, *c'est-à-dire, le premier antecedent, plus son consequent est à son consequent, comme le second antecedent plus son consequent est à son consequent*, Eucl. V. Prop. 18.

$A. B :: C. D$, il faut démontrer que $A + B. B :: C + D. D$. 1°. *alternando* $AC :: B. D$*. Donc ajoûtant* à A & à B les termes C & D, qui sont en même raison* $A + B. C + D :: B. D$; & derechef *alternando* $A + B. B :: C + D. D$; ce qu'il falloit démontrer.

* § n. 46. * § n. 46. * § n. 47.

PROPOSITION IX.

50\. *Lorsque plusieurs grandeurs sont en proportion, la somme des antecedens est à celle des consequens comme chaque antecedent est à son consequent*, Eucl. V. Prop. 12.

Soit $A. B :: C. D :: E. F$, il faut prouver

que $A + C + E$. $B + D + F$ :: A. B :: C. D :: E. F. Par la Propoſition précédente $A + C$. C :: $B + D$. D. *alternando* $A + C$. $B + D$ :: C. D. Or la raiſon de C à D eſt la même, que celle de E à F : donc $A + C$. $B + D$ :: E. F. *alternando* $A + C$. E :: $B + D$. F : donc encore, ſelon la précédente $A + C + E$. $B + D + F$ :: E. F, ou A. B, ou C. D ; car c'eſt toûjours la même raiſon. C'eſt ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION X.

Quatre grandeurs étant en proportion, dividendo, *c'eſt-à-dire, le premier antecedent moins ſon conſequent, eſt à ſon conſequent comme le ſecond antecedent moins ſon conſequent eſt à ſon conſequent.* Euclide V. Prop. 17. 14

Soit A. B :: C. D. Il faut prouver que $A - B$. B :: $C - D$. D. Puiſque A.B :: C.D : donc *alternando* A. C :: B. D : donc ôtant B de A & D de C *, $A - B$. $C - D$ :: A. C. Or la raiſon de A à C eſt la même que celle de B à D ; ainſi $A - B$. $C - D$ :: B. D. Donc *alternando* $A - B$. B :: $C - D$. D ; ce qu'il falloit prouver. * 7 n. 6.

AVERTISSEMENT.

La raiſon inverſe de la diviſion, c'eſt-à-dire, le changement d'une proportion où l'on conclut dividendo, *s'appelle converſion de raiſon : par exemple. ſi* A — B. B :: C — D. D, *en changeant ainſi* A — B. C — D :: B. D. *après ce dernier changement, la proportion demeure encore, comme il eſt évident : & cela ſe nomme* Converſion de Raiſon, *terme qui n'eſt point neceſſaire.*

PROPOSITION XI.

52\. *Deux grandeurs qui ont une même raison avec une troisiéme, sont égales entr'elles.* Eucl. V. Prop. 9.

Si *A. B* : : *C. B*. Il faut que $A = C$: car *q* soit l'exposant de la raison *A* de à *B* ; il le sera de celle de *C* à *B*, qui est la même : donc Aq
3 n. 43. $= B$, & $Cq = B$, partant $Aq = B = Cq$. Ces deux grandeurs étant égales à une troisiéme, sçavoir, à *B*, elles sont égales entr'elles par le troisiéme axiome.

PROPOSITION XII.

53\. *Deux raisons égales à une troisiéme raison, sont égales entr'elles.* Eucl. V. Prop. 11.

Si *A. B* : : *E. F*, & *C. D* : : *E. F*, il faut prouver que *A. B* : : *C. D*. Si l'exposant de la raison de *A* à *B* est *q*, celui de la raison de *E* à *F* qui est la même, est aussi *q*. Or celui de *C* à *D* est le même, que celui de la raison de *E* à *F*. C'est donc encore *q*. Les deux raisons de *A* à *B*, & *C* à *D*, ont donc un même exposant ; ainsi elles
*3 n. 41. sont égales *.

PROPOSITION XIII.

54\. *Lorsque deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont en même raison aprés avoir été multipliées, qu'avant que d'être multipliées.*

On a multiplié *A* & *B* par *x*, il faut prouver que *Ax*. *Bx* : : *A*. *B*. L'exposant de la raison de *A* à *B* est $\frac{A}{B}$, & celui de la raison de *Ax* à *Bx* est $\frac{Ax}{Bx}$. Or c'est un même exposant ; car dans $\frac{Ax}{Bx}$ ayant effacé *x* qui se trouve au dessus,

& au dessous de la ligne, reste* $\frac{A}{Bx}$; partant * s. n. 4.
ces deux raisons ayant un même exposant, elles
sont égales*. * s. n. 4.

PROPOSITION XIV.

Divisant deux grandeurs par une troisiéme, 55.
les quotiens de ces divisions seront en même raison
que ces grandeurs.

Soient deux grandeurs B & D. Je les divise par x. Le quotient de B par x soit nommé p, & celui de D par x, soit nommé q; il faut prouver que $p.q :: B.D$. Or $px = B$, & $qx = D$; donc $px.qx :: B.D$. p & q ayant été multipliez par x, selon la Proposition précédente $px.qx :: p.q$. Donc puisque $px.qx :: p.q$, il faut que $p.q :: B.D$,* ce qu'il falloit démontrer. * s. n. 53.

PROPOSITION XV.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionnelles, 56.
le produit ou le rectangle des extrêmes est égal à
celui des moyens. Eucl. VI. Prop. 16.

$A.B :: C.D$. Il faut prouver que $A \times D = B \times C$. Soit x l'exposant de ces deux raisons égales: donc $Ax = B$ & $Cx = D$; ainsi je puis exprimer cette proportion de la sorte: $A.Ax :: C.Cx$ Il faut donc démontrer que $ACx = ACx$; ce qui est évident.

COROLLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, 57.
le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen. Eucl. VI. Prop. 17.

Soient $\div A.B.C$. Puisque $B.B :: B.C$: donc $AC = BB$, ou $AC = B^2$.

PROPOSITION XVI.

58. *Lorsque quatre grandeurs sont tellement disposées, que le rectangle ou produit des extrêmes est égal à celui des moyens, elles sont proportionnelles.* Eucl. VI. Prop. 16.

Dans ces quatre lignes, *A*, *B*, *C*, *D* le produit *AD* des extrêmes est égal à *BC* produit des moyens, il faut démontrer que *A*. *B* :: *C*. *D* soit *x* le quotient de *B* divisé par *A* & *z*, celui de *D* par *C* : donc $Ax = B$, & $Cz = D$. Ainsi je réduis ces quatre termes à ceux-ci, *A*. *Ax*, *C*. *Cz*. Selon qu'on le suppose $A \times Cz = Ax \times C$. Otant de part & d'autre $A \times C$, restera $z = x$. Par consequent l'exposant de la raison de *A* à *B* est égal à celui de la raison de *C* à *D*; ainsi
* 33 n. 41. elles sont égales * : par consequent ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

COROLLAIRE I.

59. *En changeant les quatre termes d'une proportion, pourvû que les deux mêmes termes soient toûjours ou les deux extrêmes ou les deux moyens, ils seront toûjours rangez proportionnellement.*

Soient ces quatre termes *A*. *B* :: *C*. *D*, pourvû que *A* & *D*, par exemple, soient toûjours ou les deux moyens ou les deux extrêmes, leurs produits seront toûjours égaux; par consequent ils seront proportionnels, selon cette Proposition.

COROLLAIRE II.

60. *Divisant le produit des moyens d'une proportion par le premier, le quotient de la division sera le quatriéme terme, & divisant ce même produit par le quatriéme, le quotient sera le premier.*

Car ce quotient, multipliant le diviseur, refait le même produit qui a été divisé *. * 3 n. 4.

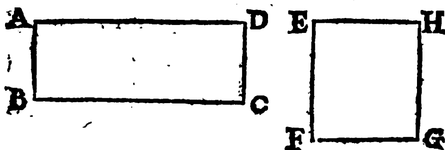
REMARQUE.

Remarquez que ces deux dernieres Propositions & leurs Corollaires sont d'un tres-grand usage dans la Geometrie, aussi-bien que dans l'Arithmetique, étant le fondement de toutes les Regles de trois, ou de proportion.

DEFINITION.

Le produit de deux grandeurs étant égal à celuy de deux autres (elles peuvent donc faire une proportion.) *si la premiere est à la troisiéme, comme la quatriéme est à la seconde, cette proportion se nomme Reciproque, ou Inverse.* 61.

Soient ces deux rectangles *AC* & *EG* égaux. si *AB. EF* :: *FG. BC*, cette proportion se



nommera *Reciproque ou Inverse*, laquelle commence & finit dans la même figure. Si un des côtez de ces deux rectangles est plus grand, l'autre est reciproquement plus petit.

PROPOSITION XVII.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'un côté, & autant d'autres d'un autre côté, lesquelles étant prises de deux en deux soient en même raison; celles-là en raison égale, seront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 22. 62.

Soient trois grandeurs *A*, *B*, *C* d'un côté, &

de la seconde, que la composée de la troisiéme & de la sixiéme le sera de la quatriéme.

Si *A*. *B* :: C. *D*, & que E. *B* :: *F*. D : je dis que *A* + E. *B* :: *C* + *F*. D.

Puisque *A*. *B* :: *C*. D & E. *B* :: *F*. *D* ; donc *alternando* *A*. C :: B. D & E. *F* :: B. *D*. Ainsi la raison de *A* à C est la même que celle de *E* à *F*, ces deux raisons étant la même que
* 5 n. 53. celle de *B* à *D* * ; Partant *A*. *C* :: E. *F*. Donc
* 5 n. 47. ajoûtant E avec *A*, & *F* avec *C* * *A* + E, C + *F* :: B. *D*. Or *alternando* *A* + E. B :: C + *F*. *D* : ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION III.

66. *Si la premiere est autant multiple de la seconde que la troisiéme de la quatriéme, & qu'on prenne les équimultiples de la premiere & de la troisiéme ; le multiple de la premiere sera autant multiple de la seconde, que le multiple de la troisiéme le sera de la quatriéme.*

Une grandeur multiple contient celle dont elle est le multiple ; ainsi c'est la même chose que si on disoit, si la premiere contient autant de fois la seconde, que la troisiéme contient la quatriéme. Ainsi il s'agit de démontrer que si *A*. *B* :: C. *D*, & que *E* & *F* soient équimultiples de *A* & *C* ; c'est-à dire, que *E* contienne *A* comme *F* contient *C*, qu'ainsi *A*. *C* :: E. *F* ; il faut que *B*. *D* :: *E*. *F*. Car puisque *A*. *B* :: C. D ; donc *alternando* *A*. C :: B, D. Or *A*. C :: *E*. *F*. Ainsi la raison de *B* à *D* est la même que celle de *E* à *F*, étant égale à une même rai-
* 5. n. 53. son *.

PROPOSITION IV.

67. *Si la premiere est à la seconde en même raison que la troisiéme à la quatriéme ; aussi les*

équimultiples

équimultiples de la premiere & de la troisiéme, auront même raison aux équimultiples de la seconde & de la quatriéme, en quelque multiplication que ce soit, si elles sont prises ainsi qu'elles se répondent.

Cela veut dire que si *A. B* :: *C. D*, ainsi *alternando A. C* :: *B. D*; il faut que *Ax. Cx* :: *Bz. Dz.*

Car * *Ax. Cx* :: *A. C*; & *Bz. Dz* :: *B. D.* *$\S$ n. 54.
Mais, *A. C* :: *B. D*; donc * *Ax. Cx* :: *Bz. Dz*; ce qu'il falloit démontrer. *$\S$ n. 53.

Proposition V.

68. *Si une grandeur est autant multiple d'une grandeur, que la retranchée de la retranchée; aussi le reste sera autant multiple du reste, que la toute de la toute.*

Cette Proposition se peut exprimer ainsi : Si *A. B* :: *E. F*; je dis que *A — E. B — F* :: *A. B*. Car alors on leur ôte des grandeurs qui sont en même raison : ainsi elles demeurent en même raison*. *$\S$ n. 48.

Proposition VI.

69. *Si deux grandeurs sont équimultiples de deux autres grandeurs, & qu'on retranche d'elles des équimultiples, ou les restes seront égaux aux mêmes, ou équimultiples d'elles.*

J'exprime ainsi cette Proposition. Si *Ax. Bx* :: *Ax — C. Bx — D*; je dis que *Ax — C. Bx — D* :: *A. B*.

Cela est évident : car *Ax. Bx* :: *A. B* *. Or * deux raisons égales à une troisiéme, sont égales*. Ainsi si *Ax. Bx* :: *Ax — C. Bx — D*; il faut que *Ax — C. Bx — D* :: *A. B*. *$\S$ n. 54. *$\S$ n. 53.

PROPOSITION VII.

70. *Les grandeurs sont entr'elles comme sont leurs équimultiples entr'elles, étant prises comme elles se répondent.*

Bx. Cx :: B. C ou Bx. B :: Cx. C; c'est
§ n. 54. ce qui a été prouvé.

Les autres Propositions du cinquiéme Livre d'Euclide, sont dans les endroits qui leur conviennent.

SECTION IV.

Des raisons Composées, & de leurs Proprietez.

AVERTISSEMENT.

Lorsque l'exposant d'une raison est simple, l'on doit dire de cette raison qu'elle est simple; & qu'elle est composée, si son exposant est fait de l'Addition ou de la Multiplication de deux ou de plusieurs autres exposans. Par exemple, l'exposant de la raison de A *à* B *soit 5. si on considere que ce nombre peut être fait de l'addition de 2 & de 3 exposans de la raison double, & de la raison triple, on pourroit dire que la raison de* A *à* B *est composée. Si l'exposant de cette raison de* A *à* B *étoit six, nombre qui est fait de deux multiplié par trois; c'est pour lors qu'on doit dire que cette raison est composée, sçavoir de ces deux exposans 2 & 3 multipliez l'un par l'autre. Car l'usage veut que par une raison composée on n'entende qu'une raison dont l'exposant est fait non par l'addition, mais seule-*

ment par la multiplication de deux ou de plusieurs exposans.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

Les raisons composées sont celles dont les exposans sont faits de la multiplication de deux ou plusieurs exposans. 71.

Soit la raison de *A* à *B* dont x est l'exposant, & que $x = zy$; alors cette raison de *A* à *B* est dite composée des deux raisons, dont z & y sont les exposans.

DEFINITION II.

Une raison composée de deux raisons égales, s'appelle Doublée. 72.

Si l'exposant de la raison de *A* à *B* est fait de z multiplié par z, c'est-à-dire, si zz est l'exposant de cette raison, elle est doublée.

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un quarré, est une raison doublée. 73.

Soit zz, ou z^2, l'exposant de la raison de *A* à *B*. Il est fait de z multiplié par z, ainsi de deux exposans égaux : il est donc l'exposant d'une raison doublée.

DEFINITION III.

Une raison composée de trois raisons égales, se nomme Triplée. 74.

COROLLAIRE.

Ainsi une raison qui a pour son exposant un cube, est une raison Triplée. 75.

Si le cube zzz, ou z^3 est l'exposant de la raison de *A* à *B*, cette raison est triplée ; car son

exposant est fait de la multiplication de ces trois grandeurs égales z, z, z.

THEOREME I.

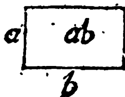
76. *Plusieurs grandeurs étant de suite, la raison de la premiere à la derniere est composée des raisons de toutes les grandeurs qui sont entre les deux extrêmes.*

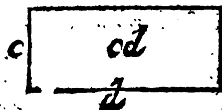
Soient ces grandeurs A, B, C, D, E, F, &c. Il faut démontrer que la raison de A à C est composée de celles de A à B, & de B à C. Soit
* 5 n. 43. x l'exposant de A à B, donc $Ax = B$ *; celui de B à C est z: donc par la même raison Bz, ou $Axz = C$. Ainsi je puis changer les trois grandeurs A, B, C en celles-ci A, Ax, Axz. Je divise Axz par A, le quotient de la division sera xz exposant de la raison de A à Axz, lequel est fait des exposans de ces raisons multipliez l'un par l'autre; partant par la premiere définition, la raison de A à C est composée de celle de A à B, & de celle de B à C. Par cette methode je puis démontrer, que la raison de A à F est composée de toutes les raisons des grandeurs interposées.

THEOREME II.

77. *La raison de deux plans est composée des raisons qu'ont les côtez de l'un aux côtez de l'autre, de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur.*

Soient ces deux plans ab & cd. Il faut démontrer que leur raison est composée de celles de





a à c & de b à d. Soit z exposant de la raison de a à c : donc* $az = c$. Soit x celui de b à d, *5. n. 43.
alors $bx = d$, & $azbx = cd$. Divisant $azbx$ par ab, le quotient sera zx composé de z & de x exposans des raisons de a à c, & de b à d : donc ces deux plans sont en raison composée de celles de a à c & de b à d, c'est à-dire, de leurs côtez : ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

Il faut se souvenir qu'on suppose toujours ici, que tous les Plans & les Solides ont rectangles, ainsi qu'on l'a fait remarquer cy-devant.

THEOREME III.

La raison d'un solide à un autre solide, est composée de la raison qu'ont les trois côtez de l'un aux autres trois côtez de l'autre. 78.

Soient deux solides abc & def. Il faut démontrer que leur raison est composée de ces trois raisons $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$. La raison de abc à def, se peut exprimer ainsi $\frac{abc}{def}$. Or cet exposant est fait des trois exposans des raisons, dont il est question de prouver que la raison de ces deux solides est composée. Partant selon la premiere Définition, ces deux solides sont entr'eux en raison composée de celles de leurs côtez.

THEOREME IV.

Lorsque quatre grandeurs sont proportionelles, le produit des antecedens est à celui des consequens en raison doublée de celles de chaque antecedent à son consequent, ou comme les quarrez de chaque antecedent au quarré de son consequent. 79.

Soit *a. b* :: *c. d*; le produit *ac* des antecedens, selon la Proposition précedente, est à *bd* celui des consequens en raison composée de celles de *a* à *b* & de *c* à *d*, qui étant égales, cette
*§ n. 72. raison est doublée *. Le quarré *aa* de l'antecedent *a* est à *bb*, quarré du consequent *b*, en raison composée des raisons de *a* à *b* & de *a* à *b*; & par consequent doublée de ces deux raisons. Or ces raisons sont les mêmes que ces deux raisons de *a* à *b* & de *c* à *d*. Par consequent le produit *ac* est au produit *bd*, comme le quarré *aa* est au quarré *bb*.

COROLLAIRE.

80. *Les plans semblables, c'est-à-dire, dont les côtez sont proportionnels, sont entr'eux en raison doublée de celles des côtez de l'un aux côtez de l'autre.*

Leur raison est composée de celles des côtez
*§ n. 77. de l'un, aux côtez de l'autre *. Ces deux raisons
*§ n. 72. sont égales. C'est donc une raison doublée *.

Ainsi tous les quarrez étant des plans semblables, sont en raison doublée de celles de leurs côtez.

THEOREME V.

81. *Lorsque six grandeurs sont proportionnelles, le produit des trois antecedens est à celui des trois consequens en raison triplée de chaque antecedent à son consequent, ou comme le cube de chaque antecedent au cube de son consequent.*

Soient *a. b. c* :: *d. e. f* le produit *abc* est au produit *def*, en raison composée de celles de
*§ n. 78. *a* à *d*, de *b* à *e*, & de *c* à *f* *. Or ces trois raisons sont égales. Cette raison composée est donc
*§ n. 74. triplée *. La raison de *aaa* cube de *a* est à *ddd* cube de *d* en raison triplée de celle de *a* à *d*. Or

c'est la même raison que celle de *a* à *d*, de *b* à *e*, & de *c* à *f*; par consequent les produits dont il est question, sont entr'eux comme le cube de chaque antecedent au cube de son consequent.

COROLLAIRE.

Les solides semblables, c'est-à-dire, dont les côtez sont proportionnels, sont en raison triplée de celles des côtez de l'un au côté de l'autre. 82.

Les côtez de ces deux solides semblables sont six grandeurs proportionnelles; partant la raison de l'un à l'autre est triplée.

Ainsi tous les cubes étant des solides semblables, sont en raison triplée de celles de leurs côtez.

THEOREME VI.

Dans une progression Geometrique, la raison de deux termes entre lesquels il y a deux intervalles, est doublée; & s'il y a trois intervalles, triplée. 83.

Soit ∺ *A. B. C. D.* La raison de *A* à *C* est composée ou égale à une raison composée de celle de *A* à *B*, & de celle de *B* à *C* *. Or ces *ȝ n. 76.
termes étant en progression, ces deux raisons sont égales. La raison qu'elles composent est donc une raison doublée *. On démontre de la *ȝ n. 72.
même maniere, que la raison de *a* à *d* est triplée *. *ȝ n. 74.

THEOREME VII.

Lorsque des grandeurs sont proportionnelles, leurs quarrez sont proportionnels. 84.

Si *a. b* :: *c. d*; je dis que *aa. bb* :: *cc. dd.* Ces quarrez sont en raison doublée de celles de leurs côtez *, c'est-à-dire, en raison doublée de *ȝ n. 80.
a à *b*, & de *c* à *d*: Et comme ces deux raisons sont égales par la supposition, aussi celles qu'el-

les composent sont égales ; la raison de aa à bb, est donc égale à celle de cc à dd ; ainsi ces quarrez sont en proportion.

THEOREME VIII.

85. *Lorsque des grandeurs sont proportionnelles, leurs cubes sont proportionnels.*

Si $a. b :: c. d$; je dis que $aaa. bbb :: ccc. ddd$: car la raison de a^3 à b^3, & celle de c^3 à d^3
* § n. 82. sont triplées des mêmes raisons*. Ainsi elles sont égales.

THEOREME IX.

86. *Trois grandeurs étant en proportion continuë, le quarré de la premiere est à celui de la seconde, comme la premiere à la troisiéme.*

Soient $\div a. b. c$; je dis que $a^2. b^2 :: a. c$.
La raison de a à c est composée des deux rai-
* § n. 76. sons de a à b & de b à c*, ces deux raisons sont
* § n. 72. égales. Ainsi la raison de a à c est doublée*. Or la raison de a^2 à b^2 est aussi doublée des mêmes
* § n. 80. raisons* : donc $a^2. b^2 :: a. c$.

THEOREME X.

87. *Quatre grandeurs étant en proportion continuë, le cube de la premiere est au cube de la seconde, comme la premiere est à la quatriéme.*

Soient $\div b. c. d. f$. La raison de b à f est
* § n. 76. composée des trois raisons interposées*, & ces trois raisons étant les mêmes, cette raison de b
* § n. 74. à f est triplée*. Or le cube b^3 est au cube c^3 en
* § n. 82. raison triplée de la même raison* : donc $b^3. c^3 :: b. f$.

THEOREME XI.

88. *Si trois grandeurs & autant d'autres prises de deux en deux sont en même raison, & en*

proportion troublée ; ces grandeurs en raison égale seront proportionnelles. Eucl. V. Prop. 23.

Trois grandeurs *A*, *B*, *C*, & autres *D*, *E*, *F* prises de deux en deux, sont en même raison : mais la proportion est troublée ; c'est-à-dire que *A*. *B* :: *E*. *F*, & *B*. *C* :: *D*. *E*, il faut démontrer que *A*. *C* :: *D*. *F*.

La raison de *A* à *C* est composée de celles de *A* à *B*, & de *B* à *C*. Celle aussi de *D* à *F* est composée de celles de *D* à *E* & de *E* à *F*. Or ces deux raisons le sont de raisons égales : car *A*. *B* :: *E*. *F* ; & *B*. *C* :: *D*. *E* ; par consequent les composantes étant égales, les composées sont égales. Ainsi *A*. *C* :: *D*. *F* ; ce qu'il falloit démontrer.

SECTION V.

De la comparaison des Raisons.

Eclaircissement touchant la grandeur ou la petitesse d'une Raison.

Les raisons sont des comparaisons. La raison de *A* à *B*, c'est le rapport de *A* à *B*. Or on peut comparer ces raisons, par exemple la raison de *A* à *B*, avec la raison de *C* à *D*, lesquelles raisons se pourront marquer ainsi, $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$. Si $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, c'est-à-dire, si ces deux raisons sont égales, c'est une proportion, ou une égalité de raisons. Nous parlerons dans cette Section, de l'inégalité des raisons. Le signe de cette inégalité, c'est $>$ ou $<$. Lors-

que l'ouverture de ce signe est de la droite à la gauche, cela marque que la raison est plus grande. Ainsi si $\frac{M}{N} > \frac{P}{Q}$, que la raison de M à N est plus grande que celle de P à Q. Si l'ouverture du signe de l'inégalité est de la gauche vers la droite, cela marque que la raison est plus petite. Si $\frac{M}{N} < \frac{P}{Q}$, que la raison de M à N est plus petite que celle de P à Q.

Il faut d'abord examiner ce qui fait qu'une raison est plus grande, ou plus petite. Ces mots de grand & de petit, sont relatifs. Une plus grande raison, c'est quand la chose qu'on compare, par rapport au terme de la comparaison, est plus grande. La raison est plus petite, si cette chose qu'on compare est plus petite, par rapport au terme de la comparaison.

L'idée la plus nette & la plus précise de la grandeur, & de la petitesse, c'est que ce qui est plus grand contient ce qui est plus petit: & plus il le contient de fois, plus il est grand. Ce qui est contenu est d'autant plus petit, qu'il est contenu plus de fois. En divisant l'antecedent d'une raison par le consequent, le quotient de la division qui expose comment ou combien de fois l'un est dans l'autre, est l'exposant de cette raison, duquel par consequent dépend sa grandeur ou sa petitesse, Quand cet exposant est plus grand, la raison est plus grande. Mais il faut qu'alors l'antecedent contienne son consequent, ou soit plus grand. Car comme je le viens de remarquer, plus une grandeur contient celle avec qui on la compare, plus elle est grande. Mais si au contraire elle étoit contenue; alors plus l'exposant

seroit petit, l'antecedent seroit plus grand, ou moins petit; car moins une grandeur est contenuë, plus elle est grande. Lorsque, dis-je, l'antecedent est plus grand, ou qu'il contient plus de fois son consequent, l'exposant de la raison étant plus grand, la raison est plus grande: & si l'antecedent est plus petit que le consequent, ou s'il est contenu dans le consequent, l'exposant de la raison étant plus grand, la raison est plus petite.

PROPOSITION. I.

PROBLEME.

Faire que deux differentes raisons ayent le même consequent. 89.

Soient ces deux differentes raisons $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Pour faire qu'elles ayent le même consequent, je les multiplie, l'antecedent & le consequent de la premiere par le consequent de la seconde; ce qui produit $\frac{ad}{bd}$. Je multiplie de même l'antecedent de la seconde raison, & son consequent par le consequent de la premiere; ce qui produit $\frac{bc}{bd}$. Ainsi les deux raisons proposées sont réduites à celles-ci, $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. Ces deux raisons ont le même consequent, & cependant conservent toûjours le même rapport de l'antecedent à son consequent*.

* In-54.

PROPOSITION II.

THEOREME I.

Deux raisons qui ont un même consequent, sont entr'elles comme leurs antecedens. 90.

Soient les deux raisons de *A* à X, & de B à X, qui ont un même consequent X. Il faut démontrer qu'elles sont l'une à l'autre, comme les antecedens *A* & *B*. Je divise *A* & *B* par X, & ces deux se trouveront ainsi exprimées; la premiere

* 5 n. 55. sera $\frac{A}{X}$ & la seconde $\frac{B}{X}$. Or * *A* & *B* étant divisez par un même diviseur X, les quotiens $\frac{A}{X}$ & $\frac{B}{X}$ sont entr'eux comme *A* & *B*; ce qu'il falloit démontrer..

AVERTISSEMENT.

En reduisant ainsi ces deux raisons $\frac{5}{10}$ *&* $\frac{2}{12}$ *à celles-ci, qui ont un même consequent* $\frac{60}{120}$ *&* $\frac{20}{120}$, *on voit quelle raison elles ont entr'elles, que* 5, *au regard de* 10, *a une plus grande raison, que* 2 *au regard de* 12, *Cela feroit douter qu'il fût vrai que la raison est plus grande, quand l'exposant est plus grand; car divisant* 10 *par* 2 *le quotient est* 5, *qui est plus petit que* 6, *le quotient de* 12 *divisé par* 2. *Mais il faut se souvenir de ce qu'on vient de voir, que quand les antecedens sont plus petits que leurs consequens; moins l'exposant est grand, la raison est plus grande.* 60 *n'est contenuë que deux fois dans* 120, *& par consequent plus grand que* 20, *qui est contenu six fois.*

PROPOSITION III.

THEOREME II.

91. *Si deux grandeurs sont inégales, la plus grande a une plus grande raison à une même gran-*

deux, que la plus petite, & plus grande raison à la plus petite, qu'à la plus grande. Eucl. V. Prop. 8.

Soient deux grandeurs inégales *A* & *B*. La plus grande est *A*, & *C* une troisiéme, telle qu'elle soit. Il faut démontrer 1°. que la raison de *A* à *C*, est plus grande que celle de *B* à *C*. J'exprime ainsi ces deux raisons

A *B* *C*

$\frac{A}{C}$ & $\frac{B}{C}$, ou $\frac{A \quad B}{C.}$ Elles ont un même consequent ; ainsi selon la Proposition précédente, elles sont comme *A* & *B*. Or *A* est plus grand que *B* : donc $\frac{A}{C} > \frac{B}{C.}$

2°. Il faut démontrer que la raison de *C* à *B* est plus grande, que celle de *C* à *A*, que $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je donne à ces deux raisons le même conſequent *, les réduisant ainsi $\frac{AC \quad BC}{AB}$ * 3 n. 89.

La raison $\frac{AC}{AB}$ est donc la même que $\frac{C}{B}$, & la raison $\frac{BC}{AB}$, la même que $\frac{C}{A}$ *. Or ces deux raisons $\frac{AC}{AB}$ & $\frac{BC}{AB}$ sont entr'elles *, comme *A* est à *B*. Mais *A*, selon la Proposition, est plus grand que *B* : donc la raison de *C* à *B* est plus grande, que celle de *C* à *A* ; ce qu'il falloit démontrer. * 3 n. 54. * 3 n. 90. & 54.

PROPOSITION IV.

THEOREME III.

De deux grandeurs, celle qui a une plus grande

raison à une même, est la plus grande ; & au contraire celle à laquelle une même a plus grande raison, est la plus petite. Eucl. V. Prop. 10.

Soient A & B deux grandeurs inégales. A a une plus grande raison avec C, que B avec C ; ainsi $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ & $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$. Je dis que $A > B$; ce qu'il faut démontrer. 1°. On suppose donc
* 5. n. 90. $\frac{A}{C} > \frac{B}{C}$. Or * ces deux raisons sont comme A & B. Il faut donc que $A > B$. 2°. Si $\frac{C}{B} > \frac{C}{A}$ il faut démontrer que B est plus petit que A. Ayant réduit ces deux raisons au même consequent $\frac{C}{B}$ à $\frac{CA}{BA}$ & $\frac{C}{A}$ à $\frac{CB}{BA}$, selon qu'on le suppose, il faut que $\frac{CA}{BA} > \frac{CB}{BA}$. Or ces deux
* 5. n. 90. raisons sont comme A & B* ; il faut donc que A soit plus grand, & B plus petit.

Proposition V.

93. *Si la premiere est à la seconde comme la troisiéme à la quatriéme, & que la troisiéme ait une plus grande raison à la quatriéme, que la cinquiéme à la sixiéme ; aussi la premiere aura une plus grande raison à la seconde, que la cinquiéme à la sixiéme.* Eucl. V. Prop. 13.

Soient ces six grandeurs, A, B, C, D, E, F ; dont les quatre premieres sont en proportion, $A . B :: C . D$, ou $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Il faut démon-

trer que si $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$, la raison $\frac{A}{B}$ sera aussi plus grande, que la raison $\frac{E}{F}$. Puisque $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$ sont une même raison ; $\frac{C}{D}$ étant plus grande que $\frac{E}{F}$, il faut que $\frac{A}{B}$ soit aussi plus grand que $\frac{E}{F}$.

PROPOSITION VI.

Si la premiere est à la seconde comme la troi- 94.
siéme à la quatriéme, & que la premiere soit plus grande que la troisiéme ; aussi la seconde sera plus grande que la quatriéme ; & si égale, égale ; si plus petite, plus petite. Euclid. V. Prop. 14.

Soit cette proportion $A. B :: C. D$. Il faut démontrer que si $A = C$, de même $B = D$; & que si $A > C$, de même $B > D$; & enfin si $A < C$, de même $B < D$.

Alternando $A. C :: B. D$; ce qui ne seroit pas, si comme $A = C$, de même B n'étoit pas égal à D ; ou si A étant plus grand que C, B n'étoit pas plus grand que D ; ou si A étant plus petit que C, le terme B n'étoit pas aussi plus petit que D.

PROPOSITION VII.

Si trois grandeurs d'un côté & trois d'un au- 95.
tre étant prises de deux en deux sont en même raison, & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisiéme ; aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme ; & si égale ;

égale ; si plus petite, plus petite. Eucl. V. Prop. 20.

Soient *A*, *B*, *C* d'une part, & *D*, *E*, *F* de l'autre. Soient *A*. *B* :: *D*. *E* & *B*. *C* :: *E*. *F*. Si $A > C$; je dis que $D > F$. Si $A < C$, que $D < F$. Si $A = C$, que $D = F$; autrement *A* ne seroit pas à *C*, comme *D* est à *F* ; ainsi qu'on le suppose, s'il étoit ou plus grand ou plus petit : car deux grandeurs inégales ne peuvent pas contenir de la même maniere une troisiéme grandeur, ou y être contenuës.

PROPOSITION VIII.

96. *Si trois grandeurs d'un côté, & trois d'un autre, prises de deux en deux sont en même raison, leur proportion étant sans ordre ; & qu'en raison égale la premiere soit plus grande que la troisiéme : aussi la quatriéme sera plus grande que la sixiéme ; & si égale, égale ; si plus petite, plus petite.* Eucl. V. Prop. 21.

Soient *A*, *B*, *C* & *D*, *E*, *F*. Si *A*. *B* :: *E*. *F*, & *B*. *C* :: *D*. *E*, & que *A* soit plus grand que *C* ; je dis que *D* sera plus grand que *F* ; si égal, égal ; si plus petit, plus petit : car *C*, ayant été posé plus petit que *A*, la raison de
* 5 n. 91. *C* à *B* est plus petite, que celle de *A* à *B** : donc puisque *B*. *C* :: *D*. *E*, & *permutando* *C*. *B* :: *E*. *D*, la raison de *E* à *D* est plus petite que celle de *A* à *B*, ou que celle de *E* à *F*, qui
* 5 n. 92. est la même. *D* est donc plus grand que *F** ; le reste est aisé.

PROPOSITION IX.

97. *Si quatre grandeurs sont en proportion, la plus grande jointe avec la plus petite, sera plus grande que les deux autres ensemble.* Eucl. V. Prop. 25.

Soient ces quatre grandeurs en proportion $A . B :: C . D$. Je suppose A la plus grande & D la plus petite, & je dis que $A + D > B + C$.

Soit X l'excès de A par-dessus B, & Z l'excès de C par-dessus D; ainsi $A = X + B$, & $C = Z + D$. Je mets donc ces nouvelles valeurs en place de A & de C, & j'ai cette proportion $X + B . B :: X + D . D$, qui est la même que la précédente. Il faut donc démontrer $X + B + D > B + Z + D$. J'en retranche de part & d'autre la grandeur $B + D$; ainsi il ne reste plus qu'à démontrer $X > Z$.

Puisque X est la difference de A à B, & Z celle de C à D. $A - B = X$ & $C - D = Z$. Or $A - B . B :: C - D . D$*. Mettant donc X & Z en place de leurs égales. $A - B$ & $C - D$, on aura $X . B :: Z . D$ ou *alternando* * $X . Z :: B . D$, & $B . D :: A . C$, suivant la supposition. Ainsi A étant plus grand que C, aussi $X > Z$; ce qu'il restoit à prouver. * 5. n. 51. * 5. n. 46.

PROPOSITION X.

98. *Les grandeurs faites de grandeurs égales & inégales sont entr'elles, comme les inégales.*

Soient ces deux grandeurs ab & ac, on peut concevoir qu'elles sont faites de b & de c multipliez par a; ainsi $ab . ac :: b . c$*, de même $abd . acd :: b . c$. * 5. n. 54.

COROLLAIRE.

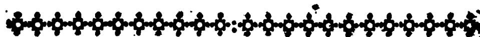
99. *Ainsi les triangles & les parallelogrammes de même hauteur sont l'un à l'autre comme leurs bases.* Eucl. VI. Prop. 1.

Les grandeurs des triangles & des parallelogrammes * dépendent de leur hauteur & de leurs bases; donc si la hauteur est la même, ils seront comme leurs bases. * L. 2. n. 130. & 135.



ELEMENS DE GEOMETRIE.

OU DE LA MESURE DE L'E'TENDUE.



LIVRE QUATRIE'ME.

Des raisons & proportions des Lignes, des Triangles, des Figures, tant de leurs côtez & circuit, que de leurs surfaces.

SECTION PREMIERE.

Méthode pour trouver & démontrer les raisons, & les proportions des Lignes.

AVERTISSEMENT.

SELON *la notion qu'on a donnée des raisons & des proportions, il est évident que pour démontrer, que quatre Lignes sont en proportion, il faut faire voir que si on les divisoit en deux, ou en trois,*

ou en tant de parties qu'on voudra. Si chaque partie de la premiere étoit égale à chaque partie de la seconde, chaque partie de la troisiéme seroit aussi égale à chaque partie de la quatriéme. Si les parties de la premiere étoient plus grande que celles de la seconde, celles de la troisiéme seroient plus grandes que celles de la quatrieme; Si plus petites, plus petites; & que si chaque partie de la premiere ne se trouvoit pas tant de fois dans la seconde, chaque partie de la troisiéme ne se trouveroit pas exactement tant de fois dans la quatriéme. Enfin, que s'il y avoit excés ou défaut, en divisant la premiere & la seconde l'une par l'autre, il y auroit excès ou défaut, en divisant la troisiéme & la quatriéme l'une par l'autre. C'est la methode la plus naturelle, puisque raison n'est que la maniere de contenir, & d'être contenu; & l'on ne sçauroit prouver plus sensiblement qu'une premiere Ligne est contenuë dans une seconde, comme une troisiéme dans une quatriéme, qu'en prouvant de ces quatre Lignes ce que nous venons de dire. C'est la methode qu'on va suivre.

DEFINITION.

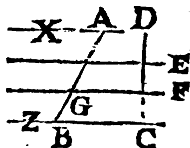
On appelle Espace parallele, celui qui est compris entre deux lignes paralleles. 1.

X & Z étant deux lignes paralelles, l'espace qu'elles renferment se nomme espace parallele.

LEMME PREMIER.

Si l'on coupe un espace parallele, ou la perpendiculaire, qui le mesure par des lignes paralleles; les lignes obliques comprises dans cet espace seront partagées en autant de parties, que la perpendiculaire. 2.

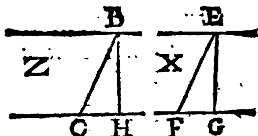
X & Z deux paralleles renferment l'espace ; que la perpendiculaire DC mesure. La ligne AB est une oblique, comprise dans cet espace, si on divise DC en trois parties, menant les deux paralleles E & F ; je dis que ces deux paralleles couperont aussi en trois parties l'oblique AB. Ces deux paralleles E & F divisant tout l'espace parallele, compris entre X & Z en trois autres espaces paralleles, dans lesquels se trouve l'oblique AB, aussi-bien que DC. Ainsi elle est divisée en autant de parties, que la perpendiculaire DC ; ce qu'il falloit prouver.



Lemme II.

3. *Les lignes obliques, qui dans des espaces paralleles égaux font les mêmes angles, sont égales, & également obliques.*

Soient Z & X deux espaces paralleles égaux, où les lignes obliques BC & EF font les angles BCH & EFG égaux ; je dis que ces deux lignes sont égales, & également obliques. Des points B & E, je mene perpendiculairement les lignes BH & EG, lesquelles sont égales*; ainsi les triangles BCH, EFG sont rectangles & entierement égaux* ; & partant BC & EF sont des lignes égales : comme aussi CH & FG ; par consequent* BC & EF sont également obliques ; ce qu'il falloit prouver.



*L. 1. n. 65.
*L. 2. n. 60.
*L. 1. n. 55.

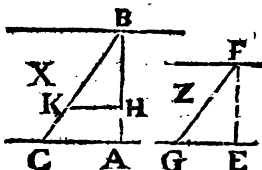
Lemme III.

4. *Les lignes obliques qui font les mêmes angles*

dans des espaces paralleles inégaux, sont inégales; plus grandes, si l'espace est plus grand; plus petites, si l'espace est plus petit.

Les lignes *BC* & *FG* obliques dans les espaces X & Z, font les mêmes angles. La perpendiculaire *AB* est plus grand que *EF*; ainsi l'espace X est plus grand que l'espace Z : il faut démontrer que l'oblique *FG* est plus petite, que l'oblique *BC*.

Soit pris sur *BA* la partie *BH* égale à *EF*, & par *H* soit menée un parallele à la base *AC*; les deux triangles *ABC* & *EFG* étant rectangles & l'angle *BCA* étant égal à *FGE*, comme on le suppose, ils sont équiangles *. L'angle *BKH* est égal
* L. 2. n. 80.
à *BCA*, & *BHK* à *BAC* *. Ainsi le triangle *BKH* est équiangle avec *BAC*; & partant avec *FGE*. On suppose *FE* égal à *BH*; donc *FG* = *BK* *. Or *BK* est partie de *BC*; donc *FG* égale à *BK* est aussi partie de *BC*, & par consequent plus petite; ce qu'il falloit démontrer.
* L. 2. n. 27.
* L. 2. n. 96.



THEOREME I.

5.

Ayant partagé une espace parallele par deux ou plusieurs paralleles, la perpendiculaire de cet espace & la ligne oblique qui y sera, seront coupées proportionnellement.

1°. La ligne oblique sera coupée en autant de parties que la perpendiculaire, par le Lemme premier *. Si par exemple, la perpendiculaire est coupée en cent parties, l'oblique sera aussi
* T. 1. 2.

coupée en cent parties.

2°. Si les parties de la perpendiculaire sont égales entr'elles, celles de l'oblique seront éga-
* § n. 3. les entr'elles, par le Lemme second *: car ces obliques font les mêmes angles sur ces parralle-
*L. 2. n. 27. les *; ainsi elles sont égales & également obliques, selon ce Lemme. Si les cent parties dans lesquelles la perpendiculaire a été coupée sont toutes égales, les cent parties de l'oblique seront donc aussi toutes égales.

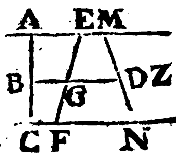
3°. Si les parties de la perpendiculaire sont inégales, celles de l'oblique selon le troisiéme Lemme sont aussi inégales. D'où il suit, que si on prend cent parties égales dans la perpendiculaire, & qu'il reste une partie qui soit ou plus petite ou plus grande, l'oblique se trouvera divisée, de sorte qu'après les cent parties égales, il y aura un reste plus petit, si le reste de la perpendiculaire est plus petit; plus grand, si le reste de la perpendiculaire est plus grand, comme on l'a prouvé dans le Lemme troisiéme. Partant comme la toute sera contenuë, ou contiendra la toute, les parties seront contenuës ou contiendront les parties. Ainsi, selon la notion des proportions, les deux lignes dont il est question sont coupées proportionnellement.

THEOREME II.

6. *Plusieurs lignes obliques étant dans un même espace parallele, si on coupe cet espace par une ligne parallele, ces lignes seront coupées proportionnellement.*

Les lignes obliques *EF* & *MN* sont entre deux paralleles, entre lesquelles *AC* est perpendiculaire. Cet espace est partagé par *Z* une parallele : donc par le Theorême précédent

MN. AC :: *MD. AB.* & de même *EF. AC* :: *EG. AB.* Et *alternando MN. MD* :: *AC. AB* :: *EF. EG.* Donc *MN. MD* :: *EF. EG.* Et *permutando*, *MN. EF* :: *MD. EG*; ce qu'il falloit prouver.

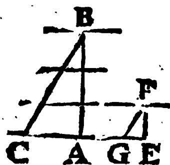


THEOREME III.

Les lignes obliques qui font les mêmes angles dans les espaces paralleles differens, sont entr'elles comme ces espaces. 7.

Les lignes *BC* & *FG* obliques font les angles *BCA* & *FGE* égaux; par consequent si *AB* est égal à *EF*, par le Lemme second * *BC* = *FG*. * 5 n. 3.

Si *AB* est plus grand que *EF*, par le Lemme troisiéme * *BC* sera plus grand que *FG*. * 5 n. 4.



Si *AB* est par exemple triple de *EF*, alors *BC* sera triple de *FG* : car supposant que *BA* est partagé en trois parties égales; par le Lemme premier * *BC* sera aussi partagé en trois parties, lesquelles par le Lemme second * seront chacune égale à *GF*; * car ces parties font les mêmes angles : * ainsi elles sont également obliques : ainsi *BC* est triple de *FG*, comme nous venons de le démontrer. * 5 n. 2. * 5 n. 3. * L. 2. n. 27.

Par cette méthode on démontrera que telle partie que *EF* est de *AB*, l'oblique *FG* est partie de l'oblique *BC*; ou que comme *EF* sera contenuë en *AB*, aussi *FG* sera contenuë en *BC*.

Si *A B* est égal, on contient une ou plusieurs fois *E F*, plus quelque reste, on démontrera que *B C* est égal ou contient de la même maniere une ou plusieurs fois exactement *F G*, plus quelque reste. Ainsi les lignes également obliques, &c. ce qu'il falloit démontrer.

SECTION II.

Des Raisons & Proportions des côtez des Triangles.

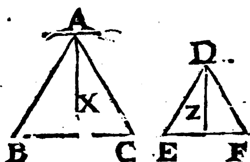
DEFINITION I.

88 DEUX *Triangles sont dits semblables, lorsque leurs côtez font des angles égaux, ou qu'ils sont équiangles,*

DEFINITION II.

9. *Dans les Triangles semblables que l'on compare, les côtez opposez aux angles égaux sont nommez, Côtez Homologues*

X & *Z* sont des triangles semblables ou équiangles, chacun de leurs côtez, comme *AB* & *DE* opposez aux angles égaux *C* & *F*, sont nommez Homologues, c'est-à-dire, proportionels. On va démontrer, que ce nom leur convient.



THEOREME I.

90. *Deux Triangles semblables ont leurs côtez proportionnels.* Eucl. VI. Prop. 4.

Je

Je mene par le sommet des deux triangles *ABC* & *DEF* des lignes paralleles à leurs bases, & de leur sommet j'abaisse sur ces bases les perpendiculaires X & Z. *Fig. precedente.*

Les angles *ABC* & *DEF* sont égaux; les obliques *AC* & *DF* font aussi les mêmes angles: Donc *AB*. *DE* :: X. Z :: *AC*. *DF**. *7 n. 7.

Ainsi *AB*. *DE* :: *AC*. *DF*. En menant par *B* & *E* des lignes paralleles aux côtez *AC* & *DF*, on démontrera de la même maniere que *AB*. *DE* :: *BC*. *EF*, & qu'ainsi deux triangles semblables ont tous leurs côtez proportionnels.

C'est pour cette raison qu'on appelle Omologues, *les côtez qui se répondent dans les figures semblables; parceque ces côtez sont proportionnels les uns aux autres, ou qu'ils ont même raison; ce que signifie ce mot* Omologue.

Theoreme II.

11. *Deux triangles semblables à un troisiéme sont semblables entr'eux.* Eucl. VI. Prop. 21.

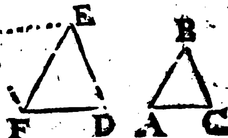
Soient *A*, *B*, *C* trois triangles. Si *A* & *C* sont semblables à *B*, les angles de *B* sont égaux à ceux de *A* & de *C*: Donc les angles de *A* & de *C* sont aussi égaux les uns aux autres.*. Ainsi, selon la premiere Definition*, *A* & *C* sont semblables. *L. 3. n. 52. *5 n. 8.

Theoreme III.

12. *Si deux triangles ont leurs côtez proportionnels, ils seront semblables.* Eucl. VI. Prop. 5.

Les côtez des deux triangles *ABC* & *DEF* sont tels, que *AB*. *BC* :: *FE*. *ED*, & *AC*. *AB* :: *DF*. *EF*. Je dis que ces deux triangles sont semblables.

Je fais sur *EF* l'angle *GEF* égal à *ABC*, & l'angle *EFG* égal à *BAC*; ainsi *EGF* est égal à *ACB* *. Par consequent *EFG* & *ABC* sont deux triangles semblables *. Ainsi il ne s'agit plus que de montrer que les deux triangles *EFG* & *EFD* sont égaux; & qu'ainsi *EFD*, le même que *EFG*, est semblable à *ABC*.



* L. 2. n. 60.

* 3 n. 8.

Puisque *EFG* & *ABC* sont semblables, donc *AB*. *BC* :: *EF*. *EG*. Par la supposition, *AB*. *BC* :: *EF*, *ED* : donc *EG* & *ED*, qui ont une même raison avec *EF*, sont égaux *. On démontera de la même maniere que tous les côtez de *EFG*, sont égaux à ceux de *EFD*; ce qu'il falloit prouver.

* L. 3. n. 52.

THEOREME IV.

13. *Deux triangles sont semblables, lorsqu'ils ont un angle égal, & les côtez qui comprennent cet angle proportionnels.* Euclid. VI. Prop. 6. *même figure.*

L'angle *FED* est égal à *ABC* & *AB*. *BC* :: *FE*. *ED*; je dis que *ABC* & *FED* sont entierement semblables. Pour le prouver, je fais comme ci-dessus le triangle *EFG* semblable à *ABC*, & je montre en la même maniere, que les triangles *EFG* & *DEF* sont égaux: car *AB*. *BC* :: *EF*. *EG* :: *EF*. *ED*. Ainsi *EG* & *ED* ont une même raison avec *EF* : donc ils sont égaux *. Or puisque l'angle *DEF* est suposé égal à l'angle *ABC* : donc il l'est à *FEG*, qu'on a fait égal à *ABC*. Ainsi ces deux triangles *DEF* & *GEF*, ayant deux côtez égaux *EG* à *ED*, &

* L. 2. n. 52.

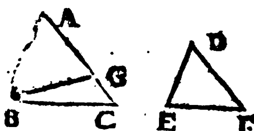
EF à EF, & les angles FED & GEF que ces côtez comprennent, égaux, ils sont égaux*. Donc* puisque DEF & CBA sont semblables à LGF, ils sont semblables entr'eux*. *L. 2. n. 98. *3. n.

THEOREME V.

14. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtez au long d'un autre proportionnels, les troisiémes angles étant de même espece, c'est à dire, ou aigus, ou droits, ou obtus; ces deux triangles sont équiangles; & les angles, dont les côtez sont proportionnels, sont égaux.* Eucl. VI. Prop. 7.

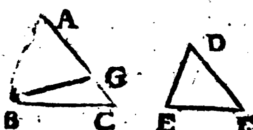
Soient ces deux triangles ABC & DEF, l'angle A est égal à l'angle D, & les côtez qui comprennent un autre angle proportionnels; je dis que, si C & F sont de même espece, ces deux triangles sont équiangles; & les angles, dont les cotez sont proportionnels, égaux.

Que C & F soient 1°, aigus; je dis que ces triangles sont équiangles; sçavoir que les angles B & E sont égaux, comme C & F.



Si B est égal à E, ces triangles, selon la Proposition precedente, sont équiangles. Mais si B est plus grand que E, soit fait ABG égal à DEF*, dont le troisiéme angle AGB sera égal au troisiéme angle F*, & partant aigu comme lui; & ABG & DEF seront équiangles, & semblables: ainsi AB. BG :: DE. EF. Or on suppose que DE. EF :: AB. BC. Ainsi AB. BG :: DE. EF :: AB. BC: donc BC & BG ayant une même raison avec AB sont égaux*: ainsi *L. 2. n. 29. *L. 2. n. 76. *L. 3. n. 52.

le triangle *GBC* est isocelle, & par consequent
les angles *BCG* &
* L. 1. n. *BGC* seront aigus *,
84. & par consequent
BGA sera plus
* L. 3. n. grand qu'un droit*.
17. Mais l'angle *AGB*
a été démontré égal
à l'angle *F*, qu'on a supposé aigu; ainsi il seroit
en même temps plus grand & plus petit qu'un
droit; ce qui est absurde.

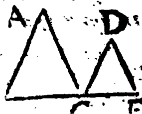


Que *C* & *F* ne soient pas aigus: donc *BGC*
égal à *C* ne sera pas aigu; ce qui ne peut pas
* L. 2. n. être *. Par consequent les angles *ABC* & *E* sont
84. necessairement égaux; ainsi *ABC* & *DEF* sont
* L. 2. n. entierement équiangles*. Donc si dans les deux
80. triangles, &c.

THEOREME VI.

15. *Si deux triangles semblables ont un point commun, & les côtez homologues paralleles, les deux autres côtez se rencontrent directement.*
Eucl. VI. Prop. 32.

Soient ces deux triangles semblables *ABC*, *DCF*, qui ont un point commun, sçavoir *C*; les côtez *AB* & *DC* sont paralleles, comme aussi *AC* & *DE*; je dis que *BC* + *CE* est une ligne droite.

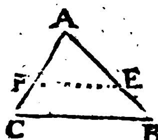


Puisque *AB* & *DC* sont paralleles, l'angle
* L. 2. n. *BAC* = *ACD**, & l'angle *ABC* = *DCE* par
25. la supposition donc les trois angles *ACB*, *ACD*,
* L. 2. n. *DCE* sont égaux aux trois angles *ACB*, *CAB*,
71. *ABC* du triangle *ABC*, lesquels valent ensemble
* L. 2. n. deux droits*: donc *BCE* est une ligne droite*.
[illegible]

THEOREME VII.

Lorsqu'on coupe deux côtez d'un triangle par une ligne parallele à la base de l'angle qu'ils comprennent, ils sont coupez proportionnellement. Eucl. VI. Prop. 2. 16.

Soit le triangle *ABC*, je méne *EF* parallele à *BC*, je dis que *AE. EB :: AF. FC*. Le triangle *AEF* est semblable au triangle *ABC*, puisqu'ils sont équiangles* : car outre que l'angle *A* est commun, l'angle *AEF* = *ABC*, & l'angle *AFE* = *ACB* * : donc *AB. AE :: AC. AF* * & *dividendo* * *AB* — *AE. AE :: AC* — *AF. AF*. Or *AB* — *AE* = *EB*, & *AC* — *AF* = *FC*. Donc *EB. AE :: FC. AF*. Permutando, *AE. EB :: AF. FC*.

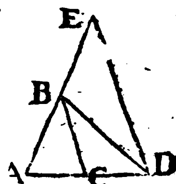


* 8. n. 8.
* L. 1. n. 27.
* 8. n. 19.
* L. 3. n. 51.

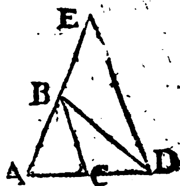
THEOREME VIII.

Si l'angle d'un triangle est coupé en deux également par une ligne droite, qui coupe aussi la base, les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les deux autres côtez. Et si cela est, la ligne tirée du sommet à la base coupe l'angle en deux également. Eucl. VI. Prop. 3. 17.

Soit le triangle *ABD*. La ligne *BC* tirée du sommet, coupe l'angle *B* en deux également. Il faut prouver, 1°. que *AB. BD :: AC. CD*. Soit mené *DE* parallele à *BC*, & prolongez le côté *AB* jusqu'à ce qu'il rencontre cette parallele. Les angles *ABC* &



* L. 2. n. 27. AED sont égaux * & par la même raison CBD & BDE. * On suppose ABC & CBD égaux ;
* L. 2. n. 27. donc CBD & BED seront aussi égaux, & par consequent BDE & BED ; ainsi le triangle DBE, étant isocelle, BD = BE. Or AB. AC :: BE



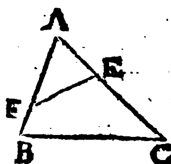
* 3 n. 16. (ou BD) CD*. Donc AB. AC : : BD. CD. & alternando AB. BD ::A C. CD.

2°. Il faut prouver que si cela est, BC coupe ABD par la moitié. Puisque supposant comme dessus DE parallele à BC. & AB prolongée en
* 3 n. 16. E, alors AB. BE :: AC. CD *, & par l'hypothese AB. BD :: AC. CD : donc BE =
* L. 3. n. 92. BD *, & le triangle DBE sera isocelle * &
* L. 2. n. 17. aura les angles BED = BDE * ; mais à cause des paralleles BC, ED, les angles ABC, BED
* L. 1. n. 83. ou son égal BDE seront égaux, * comme aussi CBD, BDE * : donc l'angle ABC = CBD ; ce
* L. 2. n. 27. qu'il falloit prouver.
* L. 2. n. 25.

DEFINITION. I.

18. *Les lignes antiparalleles sont celles qui sur les lignes qu'elles coupent font bien les mêmes angles, mais c'est d'un autre côté.*

Les lignes paralleles font les mêmes angles d'un même côté, avec les lignes
* L. 1. n. 27. qu'elles coupent *. Si AFE = ABC, les lignes FE & BC feroient ainsi paralleles ; mais si AFE = ACB, ces lignes sont antiparalleles.



THEOREME IX.

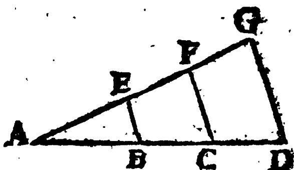
Lorsqu'on coupe les côtez d'un triangle par une ligne antiparallele à sa base, les côtez de ce triangle sont coupez en proportion reciproque. 198 Même Figure.

FE est antiparallele à *BC* : ainsi *AFE* = *AGB*, en *AEF* = *ABC*. Le triangle *AEF* a donc les mémes angles que *ABC* ; & par consequent ils sont semblables, & leurs côtez sont proportionnels * ; mais leurs côtez homologues n'ont pas * 3 n. 199 la méme situation, car *AB* n'est pas homologue avec *AF*, mais avec *AE* : ainsi ces côtez *AB* & *AC* ne sont pas coupez dans une proportion droite. *AB* n'est pas à *AF* comme *AC* à *AE* ; de sorte que de ces quatre grandeurs, la premiere est à la quatriéme comme la troisiéme à la seconde. *AB*. *AE* :: *AC*. *AF*.

PROBLEME I.

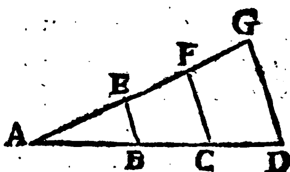
Couper une ligne droite semblablement, à une ligne qui est déja coupée. Eucl. VI. Prop. 10. 201

La ligne *AD* est coupée en trois parties *AB*, *BC*, *CD* : on propose de couper la ligne *AG* en trois parties proportionnelles à celles de *AD*. Je joins *AG* avec *AD* ; de sorte qu'elles fassent un angle, quel qu'il soit. Après je mene par les points *G* & *D* une ligne droite, & à celle-ci des paralleles par les points *B* & *C* de la coupée. Les paralleles coupent *AG*, en trois parties, qui sont propor-



tionnelles à celles de *AD*: car

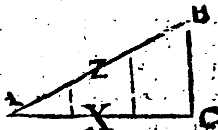
* 18. 6. * *AD. AC* :: *AG. AF*, & *AC. AB* :: *AF. AE* : ainsi on a fait ce qui étoit proposé.



PROBLEME II.

21. *Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.*

La ligne donnée est *X*, qu'il faut diviser en trois parties : je la joins avec *Z* une ligne infinie : de sorte qu'elles fassent l'angle *ZAX*, n'importe de quelle grandeur. Ayant ouvert le compas au hazard, & mis une de ses pointes sur *A*, je marque sur *Z* de suite avec la même ouverture trois parties égales : après de *B*, extrémité de ces trois parties je méne une ligne au point *C*, extrémité de *X*; & à celle-ci, des paralleles par les divisions de *Z*, selon ce qu'on vient de démontrer dans le Problême precedent, *AC* sera divisé semblablement en *AB*, c'est-à-dire, en trois parties.



PROBLEME III.

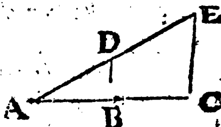
22. *Retrancher d'une ligne telle partie qu'on voudra.* Eucl. VI. Prop. 9.

Si de *AC*, *fig. preced.* on veut retrancher la troisiéme partie, il n'est question que de diviser *AC* en trois parties, suivant le Problême precedent, & retrancher de *AC* une de ces trois parties.

PROBLEME IV.

Deux lignes étant données trouver une troisiéme qui soit à la seconde, comme celle-là est à la premiere, ou à deux lignes données trouver une troisiéme proportionnelle. Eucl. VI. Prop. 11. 23.

La premiere ligne est *AB*, la seconde *BC*; je joins ces deux lignes de sorte qu'elles ne fassent qu'une ligne droite : ensuite je prens *AD* égale à *BC*, que je joins avec *AB*, de sorte qu'elles fassent un angle quel qu'il soit. Je méne de *D* une ligne sur *B*, & à celle-ci une parallele par le point *C*: je prolonge *AD* jusqu'à ce qu'elle rencontre la parallele *CE*; ce qui étant fait, je dis que *DE* est la troisiéme proportionnelle cherchée.

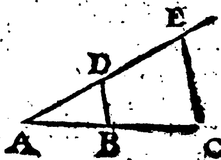


Car * *AB* est à *AD* ou à son égale *BC*, comme *AC* est à *AE*; & partant * comme *AC*—*AB* est à *AE*—*AD*, c'est-à-dire, comme *BC*, est à *DE*; ainsi ÷÷ *AB*. *BC*. *DE*; ce qui étoit proposé. * 5 n. 16. * L. 3. n. 48.

PROBLEME V.

Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes qui sont en proportion. Eucl. VI. Prop. 12. 24.

La premiere est *AB*; la seconde *AD*, avec lesquelles je fais l'angle quel qu'il soit *BAD*; la troisiéme est *BC* que je joins avec *AB*, de sorte que toutes deux fassent une ligne droite : après je méne par *B* & *D* une ligne droite, & à celle-ci par le point *C* la paral-



lele CE : je prolonge AD jusqu'à ce qu'elle rencontre cette parallele CE; ce qui étant fait, je dis que DE est la quatriéme proportionnelle : car* AB. AC :: AD. AE; ainsi *dividendo** AB. $AC - AB$ :: AD. $AE - AD$; c'est-à-dire, que AB. BC :: AD. DE, & par consequent *alternando* AB. AD :: BC. DE.

*S. n. 16.
* L. 4. n. 48.

E
D
A B C

PROBLEME VI.

25\. *Trouver toutes les réciproques possibles à deux lignes données.*

Soient les deux lignes données AB & AC : il faut prendre AB, la plus petite, sur la plus grande AC, & faire un cercle qui ait la plus grande pour diametre ; ensuite du point B où la plus petite se termine, tirer sur ce diametre une perpendiculaire indefinie, comme Y.

Toute ligne qu'on ménera de A qui coupera l'indefinie, & se terminera au cercle comme AD, ou qui coupera le cercle & se terminera à l'indefinie, satisfera au Problême. AE & AD sont réciproques à AB, AC, comme aussi AF & AG : car DE est antiparallele à DC, puisque $ABE = ADC$*: ainsi ces lignes sont coupées réciproquement*. $AFC = ABG$* & $ACF = AGE$*; donc BG & FC sont antiparalleles ; ainsi AC & AG sont coupées réciproquement.

* L. 2. n. 52 & 39.
* S n. 18.
* L. 2. n. 52 & 39.
* L 2. n. 39. & 53.

A
F
E B Y
G D C

PROBLEME VII.

Sur une ligne donnée décrire une figure semblable à une figure donnée. Eucl. VI. Prop. 18. 26.

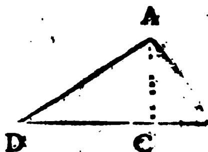
Il n'est question que de réduire cette figure donnée en triangles*, & sur la ligne donnée mener des lignes qui fassent les mêmes angles*, & forment de semblables triangles.

* L. 2. n. 122.
* L. 2. n. 29.

LEMME I.

Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on tire une perpendiculaire sur la base cette ligne-là partagera en deux autres triangles semblables, & à lui, & entr'eux. Eucl. VI. P. 8. 27.

Soit *ABD* un triangle rectangle. Si de *A* l'angle droit on mene *AC* une perpendiculaire sur la base *BD*, je dis que les trois triangles *ABD*, *ABC*, *ACD* sont tous trois semblables.



1°. Ils sont tous rectangles. 2°. Les deux triangles *ABD* & *ABC* ont l'angle *B* commun: ainsi ils ont tous leurs angles égaux*, & par consequent semblables*. Les triangles *ABD* & *ADC* ont aussi l'angle *D* commun, ils sont donc aussi semblables, puisque *ABC* & *ADC* ont semblables à un troisiéme, ils sont semblables entr'eux*. Par consequent les trois triangles rectangles *ABD*, *BCA*, *CAD* sont semblables.

* L. 2. n. 80.
* 3 n. 6.
* 3 n. 4.

THEOREME X.

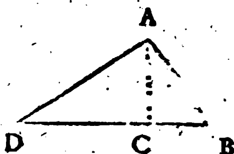
Lorsque dans un triangle rectangle on mene une perpendiculaire de l'angle droit de l'hipoténuse; voilà ce qui arrive. 28.

1. *La perpendiculaire est une moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hipoténuse,*

2°. Le côté majeur est un moyen proportionnel entre l'hipoténuse, & la plus grande partie.

3°. Le côté mineur est un moyen proportionnel entre l'hipoténuse & la plus petite partie.

Par le Lemme précedent le triangle rectangle *ABD*, est divisé par la perpendiculaire *AC* en deux triangles rectangles qui lui sont semblables & entr'eux ; de sorte que *ABD*, *CBA*, *CAD* sont trois triangles semblables. Partant* 1°, *BC. AC :: AC. CD*, ou ∺ *BC. AC. CD.*



*In. 10.

2°. *CD. AD :: AD. BD* ou ∺ *CD. AD. BD.*

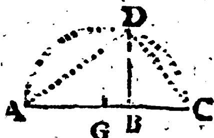
3°. *BC. AB :: AB. BD.* ou ∺ *BC. AB. BD* ; ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEME VIII.

19. *Entre deux lignes données trouver une moyenne proportionnelle.* Eucl. VI. Prop. 13.

Premiere maniere.

Les deux lignes données sont *AB* & *BC* ; je les joins de sorte qu'elles fassent une ligne droite, du milieu de laquelle, qui est *G*, & de l'intervalle de sa Moitié, sçavoir de l'intervalle *AG* je décris un demi cercle ; j'éleve ensuite sur *B* une perpendiculaire, que je prolonge jusques à ce quelle se termine dans la circonference du cercle, sçavoir au point *D* ; je dis que *BD* est moyenne entre *AB* & *BC*.

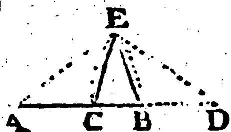


*L. 2. n. 44. L'angle *ADC* dans le demi cercle est droit*

par la construction *BD* est perpendiculaire : donc par le Theorême précedent *BD* est moyenne proportionnelle entre *AB* & *BC* ou ∺ *AB. BD. BC.*

Seconde maniere.

AB & *CB* sont deux lignes données ; je prolonge *AB* de sorte que *BD* = *AC* : & de *D* & de *A*, comme centres & d'intervalles égaux *AB* & *CD*, je fais deux cercles qui se coupent en *E* : la ligne *EB* ou *EC* sera la moyenne entre *AB* & *CB*.

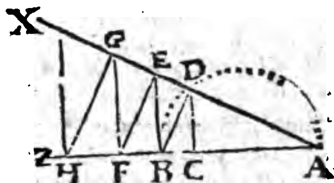


Par la construction *AB* = *AE*, & *CE* = *BE* : donc *EAB* & *CEB* sont deux isocelles ; ils ont l'angle commun *ABE* : donc ces deux isocelles sont équiangles*, & partant semblables* : donc *AB. BE* : : *BE. BC*, ou ∺ *AB. BE. BC**. *L 2. n. 85. * § n. 8. * § n. 10.

PROBLEME IX.

Ayant les trois premieres lignes d'une progression geometrique de lignes, trouver les autres à l'infini. 30.

Soient trois lignes en progression. La premiere est *AC*, la seconde *AD*, la troisiéme ligne est *AB*, que je partage par la moitié ; & de l'intervalle de cette moitié, je décris un demi cercle. Je



prens sur cette ligne *AB* une partie égale à la premiere ligne *AC* ; & sur *C* j'éleve une perpen-

dicalaire qui se termine à la circonference du cercle au point *D*, d'où je méne une ligne au point *B* & de *A* par *D*, une ligne infinie *X*. Je prolonge aussi à l'infini la ligne *AB*, que je nomme *Z*; ensuite j'éleve au point *B* une perpendiculaire qui coupe *X* au point *E*, duquel je méne une perpendiculaire qui coupe *Z* au point *F*, où je dresse une perpendiculaire qui coupe *X* au point *G* d'où j'abaisse une perpendiculaire *GH*, & ainsi de suite.

1° La ligne *AD* étant moyenne proportionnelle entre *AC* & *AB* *, est égale à la seconde ligne donnée, qui se trouve ainsi, si elle n'étoit pas donnée.

* 3 n. 28.

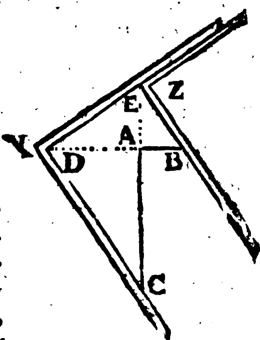
2°. Tous les triangles *ADB*, *ABE*, *AEF*, *AFG*, &c. sont équiangles *, puisqu'outre leur angle commun *XAZ*, ils sont tous rectangles; car l'angle *ADB* dans le demi cercle est droit *, & par la construction *EF* & *HG* sont perpendiculaires sur *X*, comme *DC*, *BE*, *GF* le sont sur *Z* ainsi, suivant la Définition * ils seront semblables, & auront leurs côtez homologues proportionnels * : donc *AC*. *AD* :: *AD*. *AB*, & *AD*. *AB* :: *AB*. *AE*, & *AB*. *AE* :: *AE*. *AF*, & *AF*. *AG* :: *AG* *AH*, &c. par consequent ∺ *AC*, *AD* *AB*. *AE*. *AF*. *AG*. *AH*, &c.

* L. 2. n. 80.
* L. 2. n. 44.
* 3 n. 8.
* 3 n. 10.

31. *Jusqu'à present on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la seule regle deux moyennes proportionnelles entre deux*

lignes données on les trouve mécaniquement.

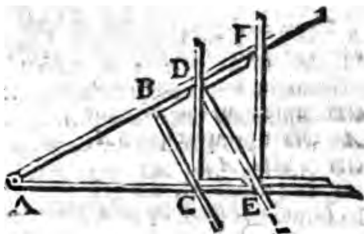
Les lignes données sont AB *&* AC, *qu'on joint de sorte qu'elles fassent un angle droit. On dispose l'équerre* X *de maniere, que son angle soit sur le prolongement de* AB, *& qu'une de ses regles rase* C *extremité de* AC.



Z *est une seconde équerre qu'on dispose, en sorte qu'une de ses regles rase* X, *& l'autre la point* B *extremité de* AB: *ainsi les triangles* CDE *&* DEB *sont rectangles, &* DA *&* EA *sont des perdiculaires; ainsi** $\div\!\!\div$ AC. AD. AE. *&* $\div\!\!\div$ AD. AE. AB: *donc* $\div\!\!\div$ AC. AD. AE. AB.

*3 n. 28.

Cette invention est de Platon. Descartes en propose une autre, avec laquelle il trouve entre deux lignes données autant de proportionnelles, qu'on en veut. L'instrument dont il se sert est composé de plusieurs équerres, qui sont tellement ajustées les unes avec les au-



tres, que lorsque l'angle FAE *est fermé, ou que les deux regles* FA *&* AE *se touchent, toutes les autres regles* BC, CD, DF, EF *se touchent & viennent au point* A : *si cet angle* EAF *s'ouvre, ces mêmes regles se poussent & se chassent.*

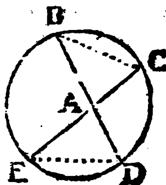
Deux lignes étant donc données, je pousse la regle BC, *de sorte que* AB *soit égale à la plus petite, & j'ouvre l'angle* EAF *de sorte que la regle* DE *soit éloignée de* A *de la grandeur de la seconde ligne.*

Il est évident que AC *&* AD *seront deux moyennes proportionnelles entre* AB *&* AE.

pour trouver plusieurs moyennes proportionnelles, il faut augmenter le nombre des équerres.

THEORÊME XI.

32. *Deux cordes qui se coupent dans un cercle, ont leurs parties en proportion reciproque.*



Soient les deux lignes, *BD*, *CE* qui se coupent au point *A*, il faut prouver que *BA*. *CA* :: *AE*. *AD*.

Soient tirées *EC*, *ED*; elles formeront les deux triangles semblables *BAC*, *EAD*; car les angles en *A* sont

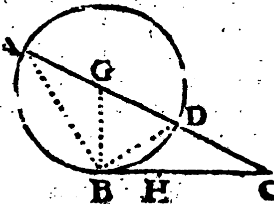
égaux, & l'angle *B* est égal à l'angle *E*, puisqu'ils s'apuyent sur le même arc *CD*; donc ils ont leurs côtez homologues proportionnels*. *3. n. 16.
Donc *BA*. *CA* :: *AE*. *AD*. Donc *alternando* réciproquement *AB* est à *AE*, comme *CA* à *AD*; ce qu'il falloit prouver.

LEMME II.

Si d'un point hors d'un cercle on lui mene une tangente & une secante, cette tangente est moyenne proportionnelle entre la secante entiere, & sa partie hors le cercle. 33.

Soit la tangente *CB* & la secante *CA*; il faut prouver que *AC*. *CB* :: *CB*. *CD*, ou ∺ *AC*. *CB*. *CD*.

Les deux triangles *ACB* & *DCB* ont l'angle *C* commun. L'angle *DBC* a pour sa mesure la moitié de l'arc *BD* *. Cette moitié est aussi la mesure de l'angle *BAC* *: ainsi les deux triangles *ACB* & *BDC* ayant deux angles égaux, & par consequent le troisiéme; ils sont semblables, & proportionnels *: le côté *DC* du triangle *BCD* est homologue avec le côté *BC* du triangle *ACB*: ainsi *AC*. *BC* :: *BC*. *CD*, ou ∺ *AC*. *BC*. *CD*; ce qu'il falloit démontrer.

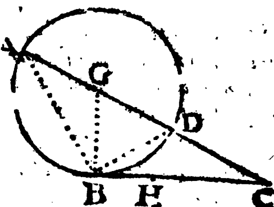


* L. 2. n. 37.
* L. 2. n. 39.
* 3. n. 8. & 10.

PROBLEME X.

Diviser une ligne en telle sorte, que la plus grande partie soit moyenne proportionnelle entre la plus petite & la toute: ce qui s'appelle 34.

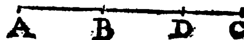
La ligne donnée est *BC* ; au point *B* j'éleve la perpendiculaire *BG*, qui soit la moitié de *BC*. De l'intervalle de *GB*, je fais un cercle dont le diametre sera par consequent égal à *BC* ; je tire la secante *AC* : aprés quoi ayant pris *CH* sur *BC*, égale à *CD*, je dis que la ligne *BC* est divisée au point *H*, comme il est requis. Si *HC* ou *DC* est la plus grande partie, & *BH* ou *BC* — *HC* la plus petite. Il faut démontrer que ∺ *BC*. *CH*. *HB*. Par le Lemme précedent *AC*. *BC* : : *BC*. *CD*, & retranchant de *AC* & *BC* les lignes *BC* & *CD*, les restes *AC* — *BC* & *BC* — *CD* seront encore en même proportion * : ainsi *BC*. *CD* : : *AC* — *BC*. *BC* — *CD* ; mais par la construction *AC* — *BC* = *DC* = *HC*, & *BC* — *HC* = *HB* : ainsi ∺ *BC*. *CH*. *HB* ; ce qu'il falloit demontrer.



* L. 2. n. 48.

Corollaire I.

55. *Une ligne étant coupée en moyenne & extrême raison, si on luy ajoûte la mediane, c'est à dire la plus grande partie, cette nouvelle ligne sera encore divisée en moyenne & extrême raison, dont la premiere sera la mediane.*



Soit *AC* une ligne divisée en moyenne & extrême raison au point *B*. La mediane ou la

plus grande partie est *BC*, que j'ajoûte à cette ligne, faisant que *CD* soit égale à *BC*. Il faut prouver que ∺ *AD*. *AC*. *CD*.

Soit $AC = a$, & $CB = x$; donc $a - x = AB$, & $CD = x$, & $a + x = AD$. Il faut donc prouver que ∺ x. $a + x$. a. x.

Par l'Hypothese a. x : : x. $a - x$.

Permutando x. a : : $a - x$. x.

Componendo $x + a$. a : : $a - x + x$. x.

Mais $a - x + x = zero$. Donc $x + a$. a : : a. x, ou ∺ $x + a$. a. x ; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE II.

Une ligne étant divisée en moyenne & extrême raison, si on retranche de la mediane la plus petite partie, le reste sera encore divisé en moyenne & extrême raison. 36.



La ligne *AC* est divisée en moyenne & extrême raison, au point *B*. Sa plus petite partie est *AB*. Il faut prouver, que si de *BC* on retranche $DC = AB$, le reste *AD* sera divisé selon la même raison; c'est-à dire, que ∺ *AD*. *AB*. *BD*. Soit $AB = y$, $BC = x$, $BD = x - y$. Donc $AC = y + x$. Il faut ainsi démontrer que ∺ $x - y$. y. x.

Selon l'Hypothese y. x : : x. $y + x$.

Permutando x. y : : $y + x$. x.

Dividendo $x - y$. y : : $y + x - x$. x. Et comme $+ x - x = 0$: donc $x - y$. y : : y. x. Ainsi ∺ $x - y$. y. x ; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE III.

Du premier Corollaire il est aisé de conclure 37.

que lorsqu'on a une ligne divisée en moyenne & extrême raison, on en peut avoir une infinité d'autres plus grandes divisées en moyenne & extrême raison, si on ajoûte à la toute la mediane: Et par le second Corollaire qu'on en peut avoir une infinité de plus petites toutes divisées en moyenne & extrême raison, en retranchant la plus petite de la mediane.

SECTION III.

Des raisons & proportions que les circuits de deux ou plusieurs figures ont entr'eux; & avec les rayons des cercles, où ces figures sont inscrites.

DEFINITION.

38. *Deux figures rectilignes sont dites semblables, lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun, & que les côtez qui les comprennent sont proportionnels.*

COROLLAIRE.

39. Il s'ensuit que toutes les figures regulieres de même nom sont semblables: car étant de même nom, elles auront même nombre de côtez & d'angles; & à cause de la régularité, tous ces angles seront égaux aussi bien que les côtez qui les comprennent*, & partant proportionnels en raison d'égalité; ainsi suivant cette Définition, elles seront semblables.

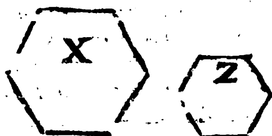
*L. 2. n. 106.

THEOREME I.

40. *Les circuits de deux figures semblables sont*

entr'eux en même raison, que leurs côtez chacun à chacun.

Soient X & Z deux exagones, chaque côté de X est *a*; ainsi tout son circuit est *6a*, chaque côté de Z est *b*,

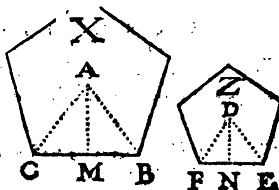


& tout son circuit par conséquent est *6b*. Or *6a*. *6b*:: *a*. *b**. * L. 3. n. 54.

THEOREME II.

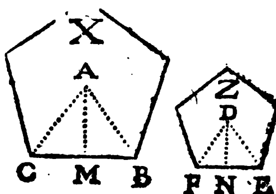
41. *Les circuits de deux figures régulieres & semblables, sont entr'eux comme les rayons ou diamétres des cercles où elles sont inscrites, & comme leurs apothêmes.*

X & Z sont deux poligones réguliers & semblables. Du centre du cercle où ils sont inscrits, je mene les lignes *AB* & *AC*, *DE* & *DF*, qui sont rayons. Les deux triangles *BAC* & *DEF* sont isocelles par la construction; & puisque ces deux figures sont semblables, les angles de leurs centres *BAC* & *EDF*



sont les mêmes; ainsi ces triangles sont semblables: donc *AB*, où le rayon de X est à *DE*, rayon de *Z*, comme *BC* à *EF*. Or le circuit de X est à celui de Z par le Theorême précedent, comme *BC* & *BF*: donc le circuit de X est à celui de Z, comme le rayon de X à celui

de Z, ou comme le diamétre de l'un est au diamétre de l'autre; car les rayons & les diamétres ont entr'eux une même raison, les rayons étant la moitié des diamétres.



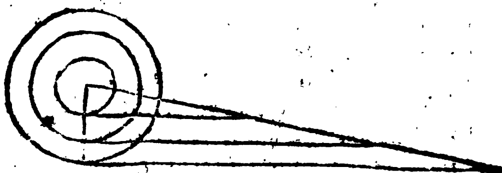
Soit *AM* une perpendiculaire sur
* L. 2. n. 144. *BC*, elle sera l'apothême de *X* *. De même soit *DN* perpendiculaire de D sur *EF*, elle sera l'apothéme de Z Or selon ce qu'on a prouvé.* *BC*
* 5 n. 16. sera à *EF* comme l'apothême de X est à Z; ainsi le circuit de X est à celui de Z, comme l'apothéme de X à l'apothéme de Z.

COROLLAIRE.

42. *Les circonferences de deux cercles sont entre elles, comme les diametres ou rayons de cercles.*

Les cercles peuvent étre considerez comme des poligones réguliers: or les circuits de deux poligones sont entr'eux comme leurs diamétres: donc les circuits ou circonferences des cercles sons entr'elles comme les diamétres des cercles; & par consequent puisque les rayons sont la moitié des diamétres, comme les rayons de ces cercles.

Si on conçoit dans un cercle une infinité d'autres cercles concentriques, dont les circonferences soient déployées & dressées comme des lignes droites, le rayon du grand cercle & son circuit feront un triangle rectangle, dans l'hypotenuse duquel les extrémitez des cercles concentriques aussi déployez doivent se trouver, puisqu'ils sont



entr'eux comme les parties du rayon du cercle qu'ils coupent. C'est pourquoy l'on a conclu delà, que la surface du cercle étoit égale à un tel triangle. Ce que nous avons démontré par une autre voye.* *L. 2. n. 154.

THEOREME III.

43. *Les arcs d'égale quantité de degrez dans differens cercles, sont entr'eux comme ces cercles dont ils sont les parties.*

Les degrez sont les parties proportionnelles d'un tout; ils sont donc entr'eux comme les tous dont ils sont les parties; c'est-à-dire, comme les cercles dont ils sont les degrez.

THEOREME IV.

44. *Les cordes d'arcs semblables, dans différens cercles, sont entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.*

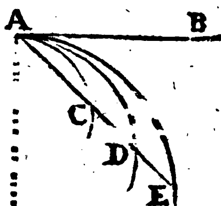
Concevant que du centre des cercles où sont ces cordes ont ait mené des lignes à leurs extrêmitez, on aura des triangles semblables, puisque ces cordes d'arcs semblables ont les angles au centre égaux: ces cordes sont donc entr'elles comme les rayons de ces cercles; & partant comme ces cercles, qui sont entr'eux comme leurs rayons*. Or les arcs d'égale quantité de degrez sont entr'eux, comme les cercles dont ils *n. 424

ſont parties par le Theorême precedent ; ces cordes ſont donc entr'elles comme les arcs dont elles ſont les cordes.

THEOREME V.

45 *Si d'un point où pluſieurs cercles ſe touchent, on méne une ligne qui coupe ces cercles, les parties de cette ligne ſeront entr'elles comme les cercles qu'elle coupe.*

A eſt un point où ſe touchent pluſieurs cercles: Soit mené de *A* une ligne qui coupe les cercles *C*, *D*, *E* ; il faut prouver que les parties *AC*, *AD*, *AE* de cette ligne ſeront entr'elles, comme les cercles qu'elles coupent. Par *A* je mene *AB*, qui touche ces cercles ; ainſi l'angle *BAE* a pour meſure ou l'arc *CA* . ou *AD*, ou *AE* * ; ainſi ces trois arcs ſont ſemblables.



* L. 2. n. 37.

Les cordes *AC*, *AD*, *AE*, par le Theorême precedent d'arcs ſemblables, ſont entr'elles, comme les arcs *AC*, *AD*, *AE*, & ces arcs ſont entr'eux comme leurs cercles ; les parties de de ladite ligne ſeront donc entr'elles, comme les cercles qu'elle coupe.

THEOREME VI.

46. *Dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les angles qui ont leur ſommet, ſoit dans la circonference, ſoit dans le centre, ſont entr'eux comme les arcs ſur leſquels ils ſont appuyez.* Eucl. VI. Prop. 33.

Cela eſt bien évident, puiſque ces arcs en ſont leurs meſures *.

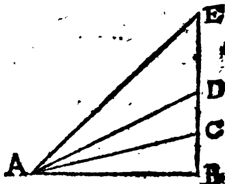
* L. 2. n. 10. & 39.

LEMME

LEMME.

Dans un triangle rectangle divisant un des angles aigus en tant de parties égales qu'on voudra, & menant des lignes droites sur le côté opposé, les parties de ce côté les plus éloignées de la perpendiculaire, sont les plus grandes. 47.

Soit *ABE* un triangle rectangle, dont l'angle *BAE* est divisé en tant de parties égales qu'on voudra par des lignes droites menées du point *A* jusques à *BE*. Il faut prouver que les parties de *BE* les plus éloignées de *AB*, seront les plus grandes. Que la partie *DC* est plus grande que *CB*, & *ED* plus grande que *DC*.



Puisque suivant l'hypothese, l'angle *BAC* a été fait égal à l'angle *CAD*, l'angle *BAD* sera divisé en deux; & suivant ce qui a été démontré*. DC. *CB* :: *AD*. *AB*. Or * *AD* > *AB*; * 5 n. 17.
donc DC > *CB*. * L. 3. n. 59.

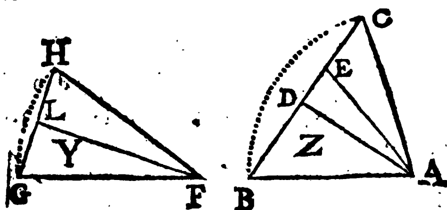
Par la même raison si l'angle *CAE* est divisé en deux, que *CAD* soit égal à *DAE*; alors *ED*. DC :: *AE*. *AC*; & puisque *AE* > *AC*: donc *ED* > DC. Ainsi les parties de *BE* plus éloignées de *AB* seront les plus grandes.

THEOREME VII.

Deux Polygones reguliers inscrits dans les mêmes; ou en differens cercles, celui qui a plus de côtez a un plus grand apothême, à raison de son circuit. 48.

Soient deux Polygones *Z* & *Y*. Je suppose

que *Y* a deux fois plus de côtez que *Z* ; qu'ainsi si *BC* est une corde de 20 degrez, *GH* sera de 10 ; c'est-à-dire, que si *Z* a 18 côtez, *Y* en aura 36.



* L. 2. n. 144. *AD* est l'apothême de *Z* *, & *FL* l'apothême de *Y*. On suppose l'angle *BAC* double de *GFH* ; ainsi *DAC* est égal à *GFH*. Ayant donc partagé également en deux l'angle *DAC*, l'angle *DAE* sera égal à *LFH*.

Ces deux triangles *LFH* & *DAE* sont rectangles, & ont les angles *LFH*, *EAD* égaux ;
* L. 2. n. 30. ils sont donc équiangles *, & semblables * ; ainsi *LH*. *LF* : : *DE*. *DA* *. Le Polygone *Y* est de
* S n. 8. 6 côtez ; ainsi 72 *LH* est son circuit ; je multi-
* S n. 10. plie par le même nombre *DE*. Si *DE* étoit la quatriême partie de *BC*, alors 72 *DE* seroient justement le circuit du Polygone *Z*, qui a 18 côtez, & contient 18 fois *BC* ; mais par le Lemme précedent *DE* est plus petit que *EC*, partant moindre que la quatriême partie de *BC*, 72 *DE* seront donc moindres que le circuit de *Z*, que je nomme *m* ; partant 72 *DE* auront moindre raison à *DA*, que non pas *m*, qui est plus
* L. 3. n. 91. grand *. Mais comme il vient d'être démontré, *LH*. *LF* : : *DE*. *DA*, aussi * 72 *LH*. *LF* : :
* L. 3. n. 54. 72 *DE*. *DA* ; partant 72 *LH* auront moindre raison à l'apothême *LF*, que le dit *m*, circuit

du Polygone Z à DA son apotême; ce qu'il falloit prouver.

La precedente démonstration bien entenduë, se peut appliquer generalement à tous autres Polygones; non-seulement en raison multiple des côtez, mais aussi en quelque proportion que ce soit, comme de 5 à 13, ou telle autre qu'on voudra, laquelle ne peut jamais être que de nombre à nombre; ainsi au lieu que dans l'exemple proposé l'angle DAC *est double de* DAE, *il seroit ici comme 13 à 5; & on pourra le supposer estre divisé en 13 parties égales, dont l'angle* DAE *en contient 5, & par le même Lemme les cinq portions de la partie* DE *plus près de la perpendiculaire* DA, *seront toûjours à proportion plus petites, que les 13 de la ligne* DC; *& ainsi 26 fois* DE *seront toûjours moindres, que dix fois* DC *qui font les circuits des Polygones, dont le nombre des côtez est 13 & 5,* DE *&* DC *n'étant chacune qu'une moitié de leurs côtez; & partant on conclura toûjours, comme ci-devant, ce qui a été proposé.*

COROLLAIRE I.

De deux Polygones de même circuit, l'apotheme de celui qui a plus de côtez est plus grand. 49.

Soient deux Polygones Z & Y, qui ont un même circuit m. L'apotheme de Z qui a moins de côtez soit *b*, celui de Y qui en a plus soit *d*. Par le present Theorême *b* est plus petit, au regarde de *m*, que *d* au regard de *m*; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE II.

Un cercle d'un même circuit qu'un Polygone, a son rayon plus grand que l'apotheme de ce Polygone. 50.

Un cercle est un Polygone d'une infinité de côtez, qui a pour apothême son rayon ; qui est ainsi plus grand que l'apothême d'aucun autre Polygone, selon le Corollaire précedent.

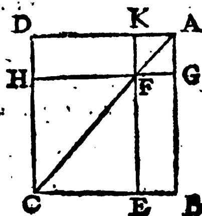
SECTION IV.

Des raisons & des proportions des Surfaces.

THEOREME I.

51. *En tout parallelogramme, les parallelogrammes adjacens, ou qui sont au tour du diamêtre, sont semblables entr'eux, & au parallelogramme entier.* Eucl. VI. Prop. 24.

Soit *ABCD* un parallelogramme, dont le diamêtre est *AC*, autour duquel soient deux autres parallelogrammes *AGFK* & *CEFH*.



1°. Chacun d'eux à un angle commun avec *ABCD*. Les angles opposez dans les parallelogrammes sont égaux * : Donc *GAK* = *ECH* = *HFE*, & *KAG* = *KFG*. Ainsi ces trois parallelogrammes ayant deux de leurs angles égaux, les autres le sont aussi ; car leurs côtez étant paralleles, ils font les mêmes angles *. Les triangles *ABC*, *AGF*, *FEC* sont donc équiangles, par consequent semblables *, comme aussi *ADC*, *AKF*, *FHC* : donc * *AG*. *GF* :: *AB*. *BC*, & *AG*,

* L. 2. n. 119.

* L. 2. n. 27.

* S n. 8.

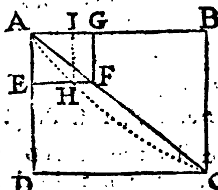
* S n. 10.

AF : : AB. AC & AF. AK : : AC. AD.
De même AK. AG : : AD. AB. Donc AKFG & ABCD sont semblables. De même CEFH, & ABCD sont semblables*. * ʒ n. 58.

THEOREME II.

52. *Si d'un parallelogramme on retranche un parallelogramme semblable, semblablement posé au total, & ayant un angle commun avec lui, le parallelogramme retranché sera à l'entour du diamétre du parallelogramme total.* Eucl. VI. Prop. 26.

Soit du parallelogramme ABCD retranché le parallelogramme AGFE, ils sont semblables, & ont l'angle EAG commun. Il faut prouver que leurs diamétres sont dans la même ligne. Si on le nie, & qu'on dise que le diamétre AHC coupe EF au point H; je méne HI, parallele à AE, les parallelogrammes EI & DB sont semblables*. Donc AE. EH : : AD. DC* : : AE. EF*. Donc EH = EF*. Ainsi la partie est égale à son tout; ce qui est absurde.



* ʒ n. 51. * ʒ n. 38. * L. 3. n. 52.

THEOREME III.

53. *Lorsqu'une ligne est coupée en moyenne & extréme raison, le rectangle de la toute & de la petite partie est égal au quarré de la médiane.*

Soit la ligne AB coupée en moyenne & extréme raison. La médiane est AD.

Donc $AB : AD :: AD . DB$, ou

* L. 3. n. 57. $\div\!\!\cdot\, AB . AD . BD$. Donc $\overline{AD}^2 = AB \times DB$ *; ce qu'il falloit prouver.

A D B

COROLLAIRE.

54. *Couper une ligne droite de telle sorte, que le rectangle de la toute & de l'une de ses parties, soit égal au quarré de l'autre.* Euclid. II. Prop. 11.

Il ne s'agit que de couper la ligne donnée en moyenne & extrême raison, ainsi qu'il a été enseigné *. Le rectangle de la toute & de la petite partie, est égal au quarré de la médiane, selon ce Theoreme.

* 5. n. 34.

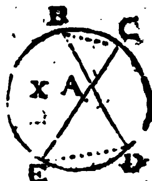
THEOREME IV.

55. *Si dans un cercle deux lignes droites se coupent le rectangle compris des deux parties de l'une, est égal au rectangle compris des deux parties de l'autre.* Eucl. III. Prop. 35.

Les deux cordes BD & CE du cercle X se coupent au point A. Il faut prouver que $BA \times DA = CA \times EA$. On a prouvé * que $BA . AE :: AC . AD$. Donc $BA \times AD$, produit des extrêmes, $= AE \times AC$ produit des moyennes *; ce qu'il falloit démontrer.

* Th. 32.

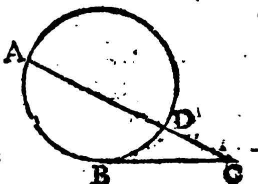
* L. 1. n. 56.



THEOREME V.

56. *Si d'un point pris à discretion hors du cercle, on tire deux lignes droites, dont l'une le touche & l'autre le coupe, & va se terminer à sa circonference concave, le rectangle compris de*

toute la coupante & de la partie hors du cercle, sera égal au quarré de la touchante. Eucl. III. Prop. 36.



De C, un point hors le cercle, soient menées deux lignes droites, CB, qui touche le cercle, & CA qui le coupe. Il faut prouver que $AC \times CD = \overline{BC}^2$. On a démontré* que $\div\!\!\div AC. BC. DC$: Donc $AC \times CD = \overline{BC}^2$ ce qu'il faloit prouver. *S n. 33. L. 3. n. 57.

COROLLAIRE I.

57. *Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on méne tant de lignes droites que l'on voudra, qui coupent le cercle & qui aillent se terminer à sa circonference concave; le rectangle compris d'une de ces coupantes telle que l'on voudra, & de sa partie hors du cercle, sera égal au rectangle compris de telle autre coupante que l'on voudra, & de sa partie hors du cercle.*

Car chacun de ces rectangles est égal au quarré de la touchante, qui seroit mené de ce même point.

COROLLAIRE II.

58. *Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on méne deux lignes droites qui le touchent, elles seront égales égales entr'elles.*

Car le quarré de chacune de ces tangentes est égal au rectangle d'une coupante & de sa partie hors du cercle; & ainsi chacun de ces quarrez est égal à l'autre, d'où il suit que les lignes qui en sont les côtez, sont égales.

THEOREME VI.

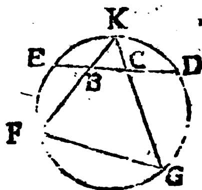
59. *Si d'un point pris à discretion hors d'un cercle, on méne deux lignes droites, dont l'une coupe le cercle & va se terminer à sa circonference concave, & l'autre atteint le cercle ; & que le rectangle compris de toute la coupante & de la partie hors du cercle soit égal au quarré de celle qui atteint le cercle, celle-ci touchera le cercle.* Eucl. III. Prop. 37.

Soit la même figure que ci-dessus. Puisque le quarré de cette ligne qui atteint le cercle, est égal au rectangle *AC* × *DC*, elle sera égale à la tangente *BC*, dont le quarré est égal à ce rectangle ; ce ne peut donc pas être une ligne differente, elle est donc tangente, ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

60. *Si d'un point dans la circonference d'un cercle on méne deux lignes à la circonference concave, & par des points également éloignez du point donné, on méne une troisiéme qui coupe les deux lignes ; le rectangle fait de l'une & de sa partie comprise entre le point donné & la troisiéme ligne, est égal au rectangle fait de l'autre ligne & de sa partie, comprise de même entre le point donné & la troisiéme ligne.*

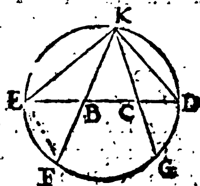
Soit *K* un point dans la circonference du cercle, d'où soient menées les lignes *KF* & *KG*, & par les points E & *D* également éloignez de K, la ligne *ED*. Il faut prouver que *KF* × *KB* = *KG* × *KC*.



Les deux lignes *BC* & *FG* sont antiparalleles ; car l'angle *KBC* a pour sa mesure la moitié de l'arc *EF*, plus celle de *KD* ou de son égale *KE**. * L. 2. n.
Or la moitié de *KF* est aussi la mesure de *KGF** : 52.
donc *KBC* = *KGF*. Par le même raisonnement * L. 2. n.
KCB = *KFG*. Ainsi, selon la Définition des 39.
antiparalleles*, *FG* & *BC* sont antiparalleles.* * 5 n. 18.
Donc *KF*. *KC* :: *KG*. *KB**. Donc *KF* × *KB* * 5 n. 19.
= *KG* × *KC** ; ce qu'il falloit prouver. * L. 3. n. 56.

COROLLAIRE.

61. Les mêmes choses que dessus étant posées, il s'ensuit non-seulement que si du point *K* on tire des lignes à l'infini, terminées à la circonference concave, & coupées par la droite *ED* comme *KF* ou *KG*, tous les rectangles qui en seront faits en la maniere ci-dessus, seront égaux entre eux, puisque prenant ces lignes deux à deux, ils seront chacun égaux au rectangle *FK* × *KB* ; mais encore que si du point *K* on tire la droite *KE*, le quarré de ladite *KE* sera égal à chacun de cesdits rectangles ; car ayant tiré la droite *EF*, il se formera toûjours deux triangles semblables tels que *FKE*, *EKB* dont l'angle *K* sera commun, & les deux autres angles aussi égaux ; sçavoir *EFK* à *KEB*, & *FBK* à *EBK** ; chacun étant appuyé sur égales circonferences du cercle, ainsi ils auront * L. 2. n. 43.
leurs côtez homologues proportionnels* ; & * 5 n. 19.
partant *FK*. *KE* :: *KE*. *KB* : donc le rectangle *FK* × *KB* égal au quarré de *KE**. Et il s'en- * L. 3. n.
suit aussi, que si la ligne *KD* est un diamétre du 56.

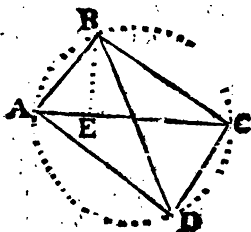


cercle, la ligne KE sera le côté du quarré
* L. 2. n. 124. inscrit dans le cercle *, auquel chacun des rectangles faits desdites lignes tels que $FK \times KE$ ou autres, seront égaux.

THEOREME VIII.

62. *Si l'on inscrit un quadrilatere dans un cercle, le rectangle fait des diagonales est égal à la somme des rectangles faits des côtez opposez.*

Soit le quadrilatere $ABCD$, dont les diagonales sont AC & BD. Il faut prouver $AC \times BD = BC \times AD + AB \times DC$. Soit menée BE, en sorte que l'angle ABE soit égal à CBD, & qu'ayant retranché l'une & l'autre de l'angle ABC les restans CBE & ABD soient égaux ; ainsi comme les angles ADB & ACB appuyez sur le même
* L. 2. n. 40. arc sont égaux *. Les triangles BDA & BCE sont équian-



* L. 2. n. 80. gles *, & semblables *. Donc $BD . AD :: BC . CE$ *; ainsi le rectangle des extrêmes est égal à ce-
* 5 n. 8.
* 5 n. 10. lui des moyennes : & par consequent $BD \times CE$
* L. 3. n. 56. $= AD \times BC$ *.

Par les mêmes raisons que dessus, les triangles BDC & BAE sont semblables : car $ABE = DBC$ par la construction, & $BAC = BDC$ étant appuyez sur le même arc BC, ils auront donc aussi leurs côtez homologues proportion-
* L. 3. n. 56. nels. Donc $BD . CD :: AB . AE$. Ainsi $BD \times AE = CD \times AB$ *. Or $BD \times AE + BD$
* L. 3. n. 57. $\times CE = BD \times AC$ *. Donc puisque $BD \times AE$

$= CD \times AB$ & $BD \times CE = AD \times BC$, il faut donc que $CD \times AB + AD \times BC = BD \times AC$, deux choses égales à une troisiéme, étant égales entr'elles. Or c'est ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IX.

Si on coupe le diametre d'un cercle, en sorte qu'une partie soit quadruple de l'autre; & que sur ce point de division on éleve une perpendiculaire terminée à la circonference; je dis que le quarré de la corde menée de l'extremité de ce diametre à l'extremité de la perpendiculaire, est égal à cinq fois celui de la petite partie de ce diametre, dont celui de la perpendiculaire est le quadruple. 63.

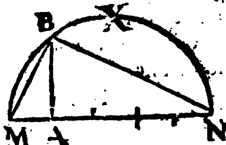
Soit le diametre MN du cercle X partagé en A, en sorte que $AN = 4AM$. Si l'on éleve la perpendiculaire AB & qu'on méne les cordes MB, BN formant le triangle rectangle MNB*; je dis que $\overline{MB}^2 = 5\overline{AM}^2$. Soit $AM = a$: donc, selon la supposition, $MN = 5a$. Soit $MB = b$: donc $\div 5a.\ b.\ a$*, partant $bb = 5aa$*. Soit maintenant $BA = d$; ainsi $\div a.\ d.\ 4a$*. Donc par la même raison $4aa = dd$. C'est ce qu'il falloit prouver.

* L. 2. n. 44.

* 5 n. 28.

L 3. n. 57.

* 5 n. 28.

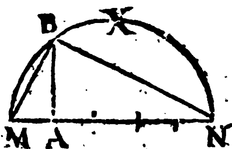


COROLLAIRE I.

Le diametre MN *étant partagé en tant de parties que l'on voudra: le quarré de* MB *sera égal à autant de fois celui de chacune de ses parties, qu'il y a de parties.* 64.

Si, *comme ci-dessus & même figure* MN est divisé au point A, de sorte que AM soit la

cinquiéme partie de *MN*, ou telle autre qu'on voudra, on aura
* 3. n. 28. toûjours * ÷ *MA*. *MB*. *MN*, ou ÷ 5*a*. *MB*. *a* : donc aussi le quarré de *MB* est égal
* L. 3. n. 57. 5*aa* *.



COROLLAIRE II.

65. *Le quarré de BA est égal à autant de fois le quarré de chacune de ses parties, qu'il y a de parties moins une.*

Fig. préced. Car supposant toûjours la nême division, ou autre à volonté, on aura de même cette proportion ÷ *AM*. *BA*. *AN*, ou ÷ *a*.
* 3. n. 28. *BA*. 4*a** : donc 4*aa* ou 5*aa* — *aa* est égal au
* L. 3. n. 57. quarré de *AB**. Ce qu'il falloit prouver, que le quarré de *AB* est égal à autant de fois le quarré, de chacune des parties, qu'il y a de parties moins une.

THEOREME X.

66. *Si une ligne est coupée en moyenne & extrême raison ; je dis que le quarré fait de la grande partie, jointe à la moitié de la ligne, vaut cinq fois le quarré de cette moitié.* Eucl. XIII. Prop. 1.

Soit *BA* divisé en moyenne & extrême raison au point *C*, & $AB = 2a$, & $BC = b$: donc $CA = 2a - b$. Il faut démontrer que le quarré de $a + b$ (qui est $aa + 2ab + bb$) est égal 5*aa*. Otez *aa* de part & d'autre, il restera seulement à prouver que $2ab + bb$ est égal à 4*aa*.

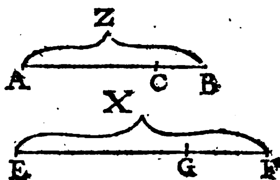
* 3. n. 34. Par la supposition $2a . b :: b . 2a - b$ * : donc
* L. 3. n. 57. $bb = 4aa - 2ab$ *, & ajoûtant de part & d'au-

te $2ab$, viendra $bb + 2ab = 4aa$ * ; ce qu'il restoit à prouver. Ainsi remettant aa de part & d'autre qu'on avoit premierement ôté, viendra $aa + bb + 2ab = 5aa$; ce qu'il falloit démontrer. * L. 1. n. 6.

THEOREME XI.

Deux lignes droites coupées en moyenne & extrême raison, sont semblablement coupées. Eucl. XIV. Prop. 2. 67.

Soient ces deux lignes Z & X coupées en moyenne & extrême raison aux points C & G. Ainsi $Z. AC :: AC. CB$, & $X. EG :: EG. GF$. Soit $AC = a$, & $CB = c$, & $EG = m$, & $GF = n$. Il faut démontrer que $AC. CB :: BG. GF$, ou que $a. c :: m. n$. Comme le quarré de la moitié de Z jointe avec a est égal à cinq fois le quarré, de la moitié de z; de même celui de la moitié de X avec m, est égal à cinq fois celui de $\frac{1}{2} X$. Ainsi ces quarrez étant proportionnels, leurs côtez le seront aussi*, puisqu'ils sont en raisons sous doublées. Partant $\frac{1}{2} Z + a. \frac{1}{2} Z :: \frac{1}{2} X + m. \frac{1}{2} X$; & en divisant* $a. \frac{1}{2} Z :: m. \frac{1}{2} X$, & doublant les consequens & changeant* $Z. a :: X. m$; mais par la supposition $\div Z. a. c$. & $\div X. m. n$; donc ces deux lignes sont



* L. 1. n. 84.

* L. 3. n. 51.

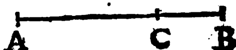
* L. 3. n. 45.

* L. 5. n. 53. coupées proportionnellement * ; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XII.

68. *Une ligne ayant été coupée en deux parties inégales, si le quintuple du quarré de la moitié est égal au quarré fait de cette moitié joint la plus grande partie, cette ligne se trouvera coupée en moyenne & extrême raison, dont cette partie sera la mediane.* Eucl. XIII. Prop. 2.

Soit AB une ligne coupée en C, en deux parties inégales. Soit $AB = 2a$, & $AC = b$; ainsi $CB = 2a - b$. Il faut démontrer que si cinq fois le quarré de a, moitié de AB, est égal au quarré fait de $a + b$, c'est à-dire, au quarré de la moitié a avec b ; ce que j'exprime ainsi $5aa = aa + 2ab + bb$. La ligne AB aura été divisée en moyenne & extrême raison, & AC ou b en sera la plus grande partie. Pour le prouver il faut montrer, que si AB est ainsi divisée, $5aa = aa + 2ab + bb$.



Supposons donc que $\div$ $2a.\ b.\ 2a - b$; donc $4aa - 2ab = bb$; & ajoûtant de part & d'autre $+ 2ab$, on aura $4aa = 2ab + bb$ *. Ajoûtant encore de part & d'autre aa, il vient $5aa = aa + 2ab + bb$; ce qu'il falloit prouver.

* L. 3. n. 55.

THEOREME XIII.

69. *Si une ligne droite est coupée en moyenne & extrême raison, le quarré fait de la plus petite avec la moitié de la plus grande, est quintuple du quarré de la moitié de la plus grande partie.* Eucl. XIII. Prop. 3.

Soit *AB* une ligne coupée en moyenne & extrême raison au point *C. fig. préced.* Soit $AC = 2m$, & $CB = n$. Donc $AB = 2m + n$. Il faut démontrer que le quarré fait de la moitié de *AC* la plus grande partie, avec *BC* la plus petite, c'est-à-dire, fait de $m + n$, qui est $mm + 2mn + nn$, est quintuple de celui de la moitié de *AC*, c'est-à dire, de *m*, lequel est *mm*. Selon la supposition $\div 2m + n . 2m . n$: donc $2mn + nn = 4mm$ * ; ajoûtant *mm* de part & d'autre, on aura $mm + 2mn + nn = 5mm$; ce qu'il falloit démontrer. * *L.* 3. n. 57.

THEOREME XIV.

Si une ligne droite est coupée en moyenne & extrême raison, le quarré de la toute & celui de la plus petite partie joints ensemble, sont triples du quarré de la plus grande partie. Eucl. XIII. Prop. 4. 70.

Soit *AB* coupée en moyenne & extrême raison au point C. *fig. préced.* Soit $AB = Z$, & $AC = a$, & $BC = e$. Donc $\div Z . a . e$. Il faut démontrer que $ZZ + ee = 3aa$.

1°. $ZZ = aa + 2ae + ee$ *. Ainsi il faut démontrer que $aa + 2ae + 2ee = 3aa$. * *L.* 3. n. 20.

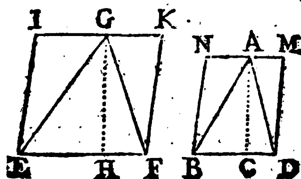
2°. $ae + ee = Ze$ *, & $Ze = aa$ * par la supposition. Ainsi $ae + ee = aa$. On peut donc dans l'équation à prouver, substituer, au lieu de $2ae + 2ee$, leur valeur égale $2aa$, & viendra $aa + 2aa = 3aa$; ce qu'il falloit prouver. * *L.* 3. n. 19. * *L.* 3. n. 57.

THEOREME XV.

Les triangles & parallelogrammes semblables 71.

bles, sont entr'eux en raison doublée de leurs côtez de même raison. Eucl. VI. Prop. 19.

Soient *ABD* & *EFG* deux triangles semblables. Soient abaissées les perpendiculaires *AC* & *GH*; les triangles *EGH* & *BAC* sont semblables étant rectangles, & l'angle *B* étant égal à l'angle
*L. 3. n. 10. *E*; donc *BC*. *AC* :: *EH*. *GH**.



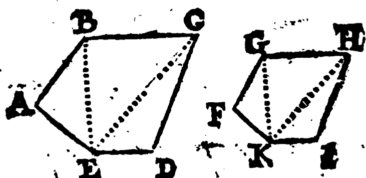
Les deux triangles *DAC* & *FGH* étant aussi semblables : donc pareillement *CD*. *AC* :: *FH*. *GH*; ainsi *BC* + *CD*. *AC* :: *EH* + *HF*.
*L. 3. n. 63. *GH**. Soit *AC* = *b* & *BD* = *d*, *GH* = *m* & *EF* = *n*; ainsi *b*. *d* :: *m*. *n* : & *alternando*,
*L. 3. n. 46. *b*. *m* :: *d*. *n**. La surface de *ABD* est la moitié de *bd**, & celle de *GEF* est la moitié de *mn*;
*L. 2. n. 135. mais la raison de *bd* à *mn* est composée des
*L. 3. n. 77. deux raisons de *b* à *m*, & de *d* à *n**. Or ces deux raisons sont les mêmes : donc, selon la Défini-
L. 3. n. 72. tion de la raison doublée, la raison de *bd* à *mn* est doublée.

Soient deux parallelogrammes *BDMN* & *EFKI* semblables, par les mêmes raisonnemens on prouvera que *b*. *d* :: *m*. *n*, & *b*. *m* :: *d*. *n*; *bd* est la surface de *BDMN*, & *mn* celle de *EFKI*. La raison de *bd* à *mn* est composée des deux raisons de *b* à *m* & de *d* à *n*. Ces deux raisons sont égales; cette raison composée est donc doublée.

LEMME.

Les figures Polygones semblables peuvent chacune être divisées en égales quantité de triangles semblables, chacun au sien. 72.

Soient deux figures semblables *ABCDE*, *FGHIK*; je dis qu'elles peuvent être divisées en une égale quantité de triangles chacun semblable à celui qui lui répond. Car 1°. puisque les figures sont semblables, elles auront un égal nombre de côtez, & les angles qu'ils compren-



dront seront égaux par la Définition*; ainsi d'un des angles égaux, comme de *E* & *K*, on peut mener des lignes aux autres angles qui divisent ces figures dans une égale quantité de triangles*. 2°. Tous les triangles d'une figure seront semblables à ceux de l'autre, chacun à celui qui lui répond; ainsi le triangle *ABE* sera semblable au triangle *FGK*, qui lui répond: car par la supposition l'angle *EAB* = *KFG*: & les côtez qui les comprennent sont proportionnels, c'est-à-dire, que *EA*. *AB* :: *KF*. *FG*; & partant ces deux triangles sont semblables*. Il en sera de même des autres triangles, dont les angles compris par les côtez homologues sont égaux soit qu'ils soient formez par les côtez des figures, ou qu'ils soient leurs résiduts en ayant ôté les égaux qui les touchent aux points

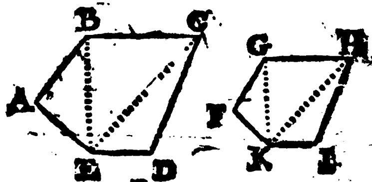
* § n. 38.
* L. 2. n. 122.
* § n. 13.

E & *K*, tels que *BEC* & *GKH*. Donc, &c. ce qu'il faloit prouver.

THEOREME XVI.

73. *Toutes les figures rectilignes semblables, sont entr'elles comme les quarrez de leurs côtez homologues.*

Supposant les mêmes choses & la même figure du Lemme précedent. 1°. chacune de ces figures se peut diviser en un égal nombre de triangles semblables entr'eux, chacun au sien par le précedent Lemme. 2°. Chacun des triangles



d'une figure sera à chacun autre, de l'autre figure qui lui répond en raison doublée de chaques côtez homologues par le Theorême précedent*, c'est-à-dire, en raison doublée de *AE* à *FK*, ou *AB* à *FG*; mais le quarré de *AE* est à celui de *FK*, en raison doublée de *AE* à *FK**: & il en de même de tous les autres triangles qui composent ces deux figures, dont à cause de leur similitude tous les côtez gardent la même proportion. Partant comme chaque triangle de l'une est à son semblable dans l'autre; ainsi tous les triangles de l'une à tous les triangles de l'autre*, c'est-à-dire, la premiere figure à la deuxiéme, comme le quarré du côté *AE* à celui de *FK*: Et il en est de même de tout au-

** 5 n. 71.*
** L. 3. n. 80.*
** L. 3. n. 50.*

tre qu'on voudra choisir. Donc, &c. ce qu'il falloit conclure.

COROLLAIRE.

Si quatre lignes sont proportionnelles, les figures semblables décrites sur ces lignes sont proportionnelles : & si ces figures semblables sont proportionnelles, ces quatre lignes sont proportionnelles. 74.
Eucl. VI. Prop. 22.

Soient quatre lignes proportionnelles *a. b* :: *c. d*, sur lesquelles soient décrites quatre figures semblables *V.*, *X*, *Y*, *Z* par le Theorême précedent *V. X* :: *aa. bb*, & *Y. Z* :: *cc. dd*; mais *aa. bb* :: *cc. dd**. Donc *V. X* :: *Y. Z*. *L. 3. n. 84.

Et si cela est, *a. b* :: *c. d*. Car les raisons doublées égales sont composées de raisons égales ; ainsi si *aa. bb* :: *cc. dd*. Il faut que *a. b* :: *c. d*.

THEOREME XVII.

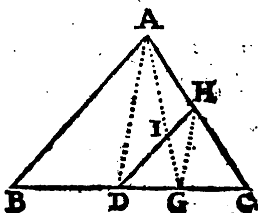
Les triangles & les parallelogrammes de même hauteur, sont entr'eux en même raison que leurs bases. 75.

Soient *Z* & *X*, ou deux triangles ou deux parallelogrammes, ayant la même hauteur que je nomme *a*; la base de *Z* est *b*, & celle de *X* est *d*. La surface de *Z* est *ab*, si c'est un parallelogramme ; mais seulement la moitié, si c'est un triangle*, *ad* est aussi la surface de *X* ; ou si c'est un triangle, seulement la moitié. Or *ab. ad* :: *b, d**. Donc *Z* & *X* sont entr'eux, comme leurs bases. *L. 2. n. 133. *L. 3. n. 54.

PROBLEME I.

Un point étant donné dans un des côtez d'un triangle, mener une ligne par ce point qui le divise, selon une raison donnée. 76.

Soit *ABC* un triangle qu'il faut partager, en menant une ligne droite par le point *D*, selon une raison donnée. Soit cette raison celle de *BG* à *GC*. Si le point *D* & *G* étoient un même point, il faudroit mener de *D* à *A* une ligne : car *BAD* & *DAC* sont entr'eux com-
*Su.75. me *BD* & *DC**. Ainsi ce qu'on propose seroit fait. Si *G* & *D* sont deux differens



points, je méne *GH* parallelement à *AD* & de *D* à *H*, où cette parallele coupe *AC*, une autre ligne, sçavoir *DH* ; il faut prouver qu'elle partage le triangle *ABC*, selon la raison *BG* à *GC*.

Les deux triangles *BAG* & *GAC* sont en-
*Su.75. tr'eux comme *BG* à *GC**. Il n'est donc question que de prouver, que *DHC* = *AGC*, & *DBAH* = *BAG* ; ainsi que *DHC*. *AGC* :: *DBAH*. *BAG*. Les deux triangles *GAH* & *GHD* entre mêmes paralleles sur la même base *GH*
L. 2. n. 134. sont égaux. Donc *GHC* + *CDH*, ou *DHC* = *GHC* + *GAH*, ou *GAC*. Reste à prouver que *ABDH* = *ABG* ; ce qui est facile : car par la même raison qui vient d'être dite, le triangle *ADG* est égal à celui de *AHD* ; ainsi les ajoûtant chacun au triangle *ABD*, on aura *ABDH* = *ABG* : & partant *ABDH*. *DHC* :: *ABG*. *ABC*. On a donc fait ce qu'il falloit faire.

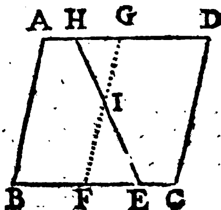
PROBLEME II.

77. *Partager un Parallelogramme selon une rai-*

son donnée, en menant une ligne par un point donné.

Soit *ABCD* un parallelogramme. Il le faut couper selon la raison de *BF* à *FC*, menant une ligne par *E* un point donné.* *I n. 78.

1°. Je méne *FG* parallele à *AB*, ou à *CD*. Ces deux portions *ABFG* & *CDGF* sont entr'elles, comme *BF* est à *FC*, selon le dernier Theoréme*.



2°. Je prens *CH* égal à *FE*, & ayant mené de *E* à *H* une ligne droite; je dis que *ABEH* & *ECDH* sont les portions que l'on cherche: car *HGI* & *EFI* sont deux triangles semblables; puisqu'ils sont équiangles: car les angles au point *I* sont égaux,* *L. 2. n. 21. & les autres angles sont pareillement égaux, étant alternes entre les paralleles*; ainsi ces *L. 2. n. 25. triangles ayant les côtez *EF* & *GH* égaux, sont entierement égaux*. Partant *ABFIH* = *ABFG* *L. 2. n. 96. — *HGI*; & ajoûtant de part & d'autre la valeur de *HGI* égal *FIE*, on aura *ABFIH* + *FEI* = *ABFG*; ce qu'il falloit démontrer. On prouvera de la même maniere *CDHE* = *CDGF*.

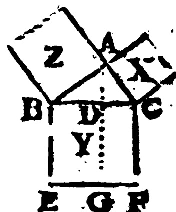
THEOREME XVIII.

Dans un triangle rectangle le quarré de l'hypothénuse est égal aux quarrez des deux autres côtez. Eucl. I. Prop. 47. 78.

Autre Démonstration que celle qu'on a donnée au Livre II. n. 142.

ABC est un triangle rectangle. L'angle droit

est A, & BC l'hypothénuse. Il faut prouver que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; & d'une autre maniere que
* L. 2. n. nous n'avons fait *.



142. J'abaisse de l'angle droit A, la perpendiculaire AD ; que je prolonge. Selon ce
* 3 n. 28. qui a été prouvé *, ∺ BC.
* L. 3. n. BA. BD : donc * $\overline{AB}^2$
57. $= BC \times BD$, ou $BE \times BD$, puisque $BC = BE$ à cause du quarré.

De même ∺ BC. AC. CD ; donc $\overline{AC}^2$ $= BC \times CD$, ou $CF \times CD$ puisque $CF = CB$.
* L. 3. n. Or $\overline{BC}^2 = BE \times BD + CF \times CD$ * : donc $\overline{BC}^2$
18. $= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE I.

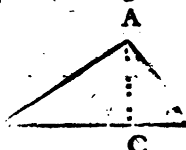
79. *Dans les triangles rectangles, quelque figure que ce soit, faite sur l'hypothenuse, est égale aux figures semblables & posées de la même maniere sur les deux autres côtez.* Euclid. VI. Prop. 31.

Soient sur les côtez BD. DA. AB trois figures X. Y. Z semblables, X soit sur l'hypothenuse. Ces figures sont entr'elles comme
* 3 n. 73. $\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{AB}^2$ *. Or $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$ par ce Theoréme : donc $X = Y + Z$.

COROLLAIRE II.

80. *Dans un triangle rectangle ayant mené de l'angle droit une perpendiculaire sur l'hypothenuse, les quarrez faits sur les deux autres côtez sont entr'eux comme les parties de l'hypothenuse.*

Soit *ABD* un triangle rectangle, dont *DB* est l'hypothenuse, sur laquelle de l'angle droit *A* tombe la perpendiculaire *AC*. Il faut prouver que $\overline{AD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: *DC*. *CB*, puisque ∺ *DB*. *DA*. *DC* *; Donc *DB* × *DC* = $\overline{DA}^2$ *. Par la même raison ∺ *DB*. *BA*. *BC*; donc aussi *DB* × *CB* = $\overline{BA}^2$. Partant *DB* × *DC*. *DB* × *BC* :: $\overline{AD}^2$. $\overline{AB}^2$ mais *DB* × *DC*. *DB* × *BC* : *DC*. *CB* * : ainsi; $\overline{AD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: *DC*. *CB*; ce qu'il falloit démontrer.



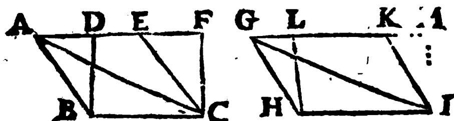
* 3 n. 28.

* L. 3. n. 57.

* L. 3. n. 54.

THEOREME XIX.

81. *Les parallelogrammes qui ont un angle commun ou égal, sont en raison composée des côtez qui le comprennent.* Eucl. VI. Prop. 23.

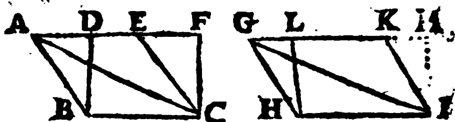


L'angle *ABC* est égal à l'angle *GHI*. Je dis que ces deux parallelogrammes sont en raison composée de *AB* à *GH*, & de *BC* à *HI*. Ces parallelogrammes *ABCE* & *GHIK* sont égaux aux rectangles *BDFC* & *HLMI* chacun au sien *, lesquels sont en raison composée de *BD* à *HL* & de celle de *BC* à *HI* *. Or la raison de *DB* à *HL* est la même que celle de *AB* à *GH*, les deux triangles *ABD* & *GHL* étant semblables. Car, 1°. ils sont rectangles. 2°. Les

* L. 2. n. 2.

* L. 3. n. 129.

* L. 3. n. 77.



angles *ABC* & *GHI* étant égaux, si on ôte les angles droits *DBC* & *LHI*, les restes *ABD* &
* L. 2. n. 80. *GHL* sont égaux ; ainsi ils sont équiangles*. Et
* 5 n. 10. partant ils ont les côtez proportionnels*.

COROLLAIRE I.

82. *Lorsque deux parallelogrammes égaux ont un angle commun ou égal, les côtez qui le comprennent, sont en raison reciproque.* Eucl. VI. Prop. 14.

Si les parallelogrammes *A CE* & *GHIK* sont égaux entr'eux, *fig. ci-dessus* : je dis que *AB. BC GH. HI* sont en raison reciproque ; c'est-à-dire, que *AB. GH* : : *HI BC*.

* L. 3. n. 58. Puisque *BD* X *BC* = *HL* X *HI*. Donc* *BD. HL* : : *HI. BC* Or puisque par la supposition les angles *ABC* & *GHI* sont egaux ; on con-
* 5 n. 7. clura* que *AB. GH* : : *BD*, *HL* : : *HI*. BC ; &
* L. 3. n. 63. partant *AB. GH* : : *HI. BC** ; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE II.

83. *Si deux triangles ont une surface égale, & un angle commun ou égal, les côtez qui comprennent cet angle sont en raison reciproque.* Eucl. VI. Prop. 15. (*même fig.*)

Soient deux triangles *ABC* & *GHI* dont les surfaces sont égales, & les angles *ABC* & *GHI* égaux ; Il faut démontrer que *AB. GH* : : *HI. BC*. Ces triangles sont moitiez des parallelogrammes

grammes *ABCD* & *GHIK*, dont on vient de prouver que *AB*. *GH* :: *HI*. *BC*; ce qu'il falloit prouver.

PROBLEME III.

Trouver un quarré égal à un rectangle donné. 84.

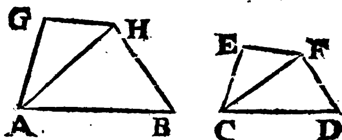
Soit *bd* le rectangle donné. Il faut chercher une moyenne proportionnelle entre *b* & *d**. Si c'est * *x*, donc ÷ *b*. *x*. *d*. & *bd* = *xx**. Ainsi on a trouvé un quarré égal à un rectangle donné.

* S n. 292. * L. 3. n. 57.

PROBLEME IV.

Sur une ligne droite donnée décrire une figure rectiligne semblable à une figure rectiligne donnée, & semblablement posée à la figure rectiligne donnée. Eucl. VI. Prop. 18. 85.

Soit *AB* une ligne droite, sur laquelle il faut faire une figure semblable au rectiligne *CDFE*, & semblablement posé.



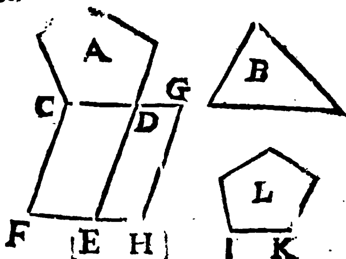
Je résous *CDEF* en deux triangles, suivant que le nombre de ses côtez l'exige * sur *AB*; je fais *ABH*, triangle semblable au triangle *CDF* *, & sur *AH* le triangle *AGH* semblable à *CEF*, & ainsi de suite, s'il y a plus de triangles. Ces triangles semblables ont leurs côtez proportionnels *; mais comme ils forment ou composent * ces deux figures, elles auront donc aussi leurs angles égaux, & leurs côtez homologues proportionnels. Ainsi *AB*. *AG* :: *DC*. *CE*, & consequemment ces figures seront semblables *; ce qu'il falloit prouver.

* L. 2. n. 122. * L. 2. n. 97. * S n. 104. * S n. 28.

PROBLEME V.

86. *Deux figures Rectilignes étant données, en décrire une troisième semblable à l'une & égale à l'autre.* Eucl. VI. Prop. 25.

La Rectiligne donnée est *A*; il en faire un qui lui soit semblable & égal à *B*, autre Rectiligne donnée.



Sur *CD* je fais le Parallelogramme *CE* égal à *A* *, & de la même maniere sur *DE* le Parallelogramme *DH* égal à *B* ayant l'angle donné *D*, ensuite je trouve *IK* moyenne proportionnelle entre *CD* & *DG* * sur *IK*, je fais *L* semblable à *A* *; je dis que *L* est la figure demandée. Il faut prouver que *L* est égal à *B*.

* L. 2. n. 139. & 140.

* S n. 29.
* S n. 85.

A & *L* étant semblables par la construction, elles sont l'une à l'autre comme $\overline{CD}^2$ à $\overline{IK}^2$ *, c'est-à-dire, en raison doublée de *CD* à *IK* *; mais par l'hypothese ∺ *CD*. *IK*. *DG* : ainsi *CD* est à *DG* aussi en raison doublée de *CD* à *IK*, * & par consequent *CD*. *DG* : : *A*. *L*; mais aussi *CD*. *DG* : : *CE*. *DH* *. Et par la construction *CE* = *A* & *DH* = *B* : donc *CD*. *DG* : : $\left\{ \frac{A.\ B}{A.\ L} \right.$. Partant *B* = *L* *; ce qu'il falloit démontrer.

* S n. 73.
* L, 3. n. 80.
* L. 3. n. 72.
* S n. 75.
* L. 3. n. 52.

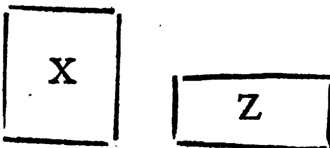
Remarquez que cette construction se feroit

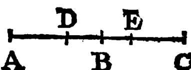
plus facilement, si au lieu du Parallelogramme CE indifférent, on avoit fait un Rectangle.

THEOREME XIX.

Un quarré de même circuit qu'un parallelogramme rectangle, est plus grand que ce parallelo- 87 *gramme de la valeur du quarré de la moitié de la difference, qui est entre les côtez de ce parallelogramme.*

X est un quarré, & *Z* un parallelogramme de même circuit. *A C* est la somme des deux côtez, tant de *X* que de *Z*. La moitié de *AC*, qui est *AB*, est le côté du quarré *X*. *AE* est le grand côté de *Z*, & *EC* le petit. Soit *A B* ou *B C* $= b$, & *BE* $= a$ & qu'on prenne *BD* $= a$: donc *AE* le grand côté de *Z* sera $b + a$, & le moindre *EC* ou *AD* sera $b - a$; leur difference sera donc $2a$, le quarré *X* sera donc égal à bb, & le rectangle *Z* égal au produit de $b + a \times b - a$, c'est-à-dire, à $bb - ab + ab - aa$ ou $bb - aa$; par consequent la difference de *X* & de *Z* est aa, quarré de la moitié de la difference des côtez; ce qu'il falloit prouver.





THEOREME XX.

De deux Polygones reguliers de même circuit, 88 *celui qui a plus de côtez a une plus grande surface.*

Un polygone est égal à un triangle, qui a pour base son circuit, & pour hauteur son apo-

L. 2. n. thême. Soient donc deux polylognes de même
145. circuit; je nomme *x* la moitié de leur circuit,
l'apothême de celui qui a plus de côtez soit *b*,
*L. 2. n. celui de l'autre soit *d*; voila donc * leur surface
135. *xb*, & *xd*. Or *xb*. *xd* :: *b*. *d**, & *b* > *d**: donc
*L. 3. n. 54. *xb* sera plus grand que *xd*.
*§ n. 48.

Corollaire.

89. *De toutes les figures isoperimetres, c'est-à-dire, de même circuit, le cercle est la plus capable.*

Car, 1°, un quarré est plus grand qu'un paral-
§ n. 87 lelogramme de même circuit. Le quarré est un polygone, & par consequent le cercle, consideré comme un polygone d'un nombre infini de côtez, a un plus grand apothême que lui, ainsi une plus grande surface. Il en est de même des autres polygones.

Theoreme XXI.

90. *Les Polygones reguliers & semblables, sont en raison doublée de celles de leurs côtez.* Eucl. VI. Prop. 20.

Soient *X* & *Z* deux polygones semblables; ils
L. 2. n. sont égaux à deux triangles semblables : & si
145. *a* est la moitié du circuit de *X* & *b* son apothême, & *c* la moitié du circuit de *Z* & *d* son apothême, *ab* = *X* & *cd* = *Z*. Or *ab* est à *cd* en raison doublée de celle de *a* à *c*, ou de celle de *b*
*§ n. 71. à *d**, puisqu'elle est égale par l'hypothese, ces figures étant semblables.

Corollaire.

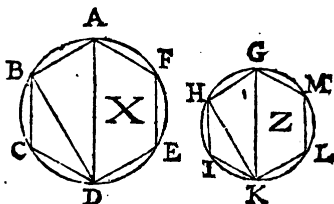
91. *Donc la surface d'un cercle est à celle d'un autre cercle en raison doublée de son circuit, ou de son diametre.*

Car ce sont deux polygones semblables d'un nombre infini de côtez.

THEOREME XXII.

Les Polygones réguliers & semblables, sont entr'eux comme les quarrez des diametres des cercles où ils sont inscrits. Eucl. XII. Prop. 1. 92.

Soient deux polygones X & Z inscrits dans deux cercles, il faut démontrer qu'ils sont entre eux comme les quarrez de leurs diametres *AD*, & *GK*.



Puisque X & Z sont polygones semblables, ils seront l'un à l'autre en raison doublée du côté *AB* au côté *GH*, par le Theorême précedent ; mais à cause de cette similitude, les triangles *ABD*, *GHK* sont aussi semblables : car tous leurs angles sont égaux étant appuyez sur semblables circonferences*. Donc les côtez homologues seront proportionnels*, & partant *AB*. *GH* : : *AD*. *GK* ; ainsi la raison doublée de *AB* à *GH* sera la même que la doublée de *AD* à *GK*. Donc le Polygone X sera au polygone Z en raison doublée du diametre *AD* à *GK*, c'est-à-dire, comme le quarré *AD* au quarré de *GK** ; ce qu'il falloit démontrer.

* L. 2. n. 39.
* S n. 10.
* L. 3. n. 80.

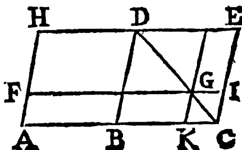
COROLLAIRE.

Donc puisque les Cercles peuvent être pris pour des Polygones, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrez de leurs diametres. Eucl. XII. Prop. 2. 93.

THEOREME XXIII.

94. AB = BC ; *le Parallelogramme* ABDH *sera plus grand que le Rectancle* AFGK, *& que quelqu'autre dont le point* G *sera dans la diagonade* DC, Eucl. VI. Prop. 27.

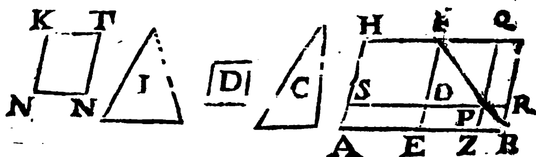
* L. 2. n. 132. *BG = GE** : donc *BG + GC = GE + GC*; c'est-à-dire, que *BI = KE*. Or *BF = BI*, puisque *AB = BC*. Donc *BF + BG*, ou *AG = BG + KE*. Or *BG + KE* est plus petit que *BE*, ou *AD* son égal. Donc *AG* est plus petit que *AD*.



PROBLEME VI.

95. *Appliquer à* AB, *ligne donnée, un Parallelogramme égal à* C, *défaillant d'un Parallelogramme semblable à* D.

C *ne doit pas être plus grand qu'un Parallelograme fait semblable à* D, *& appliqué à la moitié de* AB, *c'est-à-dire, plus grand que* AF *ou* EG. Eucl. VI. Prop. 28.



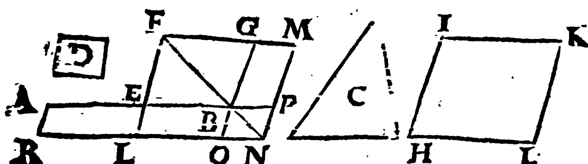
Coupez *AB* également au point *E*, sur *EB* faites
* 5 n. 85. le parallelogramme *EG* semblable à celui *D** lequel sera plus grend que *C* suivant la requisition, que cet excès soit de la figure *I*, soit fai

le parallelogramme *NT* égal à *I*, & ſemblable à *D* ou *EG* par le Problême*, ſoit menée la dia- * § n. 86.
gonale *FB*, & ſoit fait *FO* = *KN* & *FQ* = *KT*, par *O* & *Q* ſoient menées les paralleles *SR* & *QZ* le parallelogramme *AP* eſt ce qu'on cherche.

Car ces parallelogrammes *D*, *EG*, *OQ*, *NT*, *ZR* ſont ſemblables entr'eux, & *EG* = *NT* + *C* = *OQ* + *C*; par conſequent *C* eſt égal au gnomon *OPQ* = *AO* + *PG* = *AO* + *EP* = *AP*; ce qu'il falloit démontrer..

PROBLEME VII.

à AB *une ligne droite donnée, appliquer un parallelogramme égal à* C, *qui excede d'un parallelogramme ſemblable à* D. Eucl. VI. Prop. 29. 96.



Soit coupée également *AB* en *E*; ſur *EB* ſoit fait *EG* ſemblable à *D** enſuite au moyen des * § n. 85
Problêmes* ſoit trouvé *HK* égal à *EG* + *C* & * L. 2. n.
ſemblable à *D* ou à *EG*. Je prolonge *FE* & *FG*, 139. &
de ſorte que *FL* = *IH* & *FM* = *IK*. Je méne § n. 86.
par *L* & *M* les paralleles *RN*, *MN* & *AR*; je prolonge *AB* & *GB*; je méne le diametre *FBN*, & *AN* eſt le parallogramme qu'on cherche.

Car ces quatre parallelogrammes *D*. *HK*, *LM*. *EG* ſont ſemblables par la conſtruction; donc *OP* eſt ſemblable à *LM*, ou à *D**. * § n. 55.

De même $LM = HK$, par la construction ; ainsi $LM = HK = EG + C$: donc $LM = EG + C$: donc $LM - EG = C$. Or $LM - EG$ est égal à $BM + LB + BN$, ou égal à $BL + AL + BN$; car $AE = EB$ par l'hypothese : donc $C = BL + AL + BN$ ou $C = AN$; ce qu'il falloit démontrer.

Probleme VIII.

97. *A une figure rectiligne donnée, en trouver une autre semblable en raison donnée.*

Soit *A* une figure donnée. On demande la figure *X*, à laquelle la surface de *A* ait une raison donnée, comme par exemple de 5 à 1.

Ces figures, supposées semblables, doivent être entr'elles comme les quarrez de leurs côtez
* § n. 73. homologues *,
* L. 3. n. 80. c'est-à-dire, en raison doublée desdits côtez*, ou même de quelqu'autre lignes corde, ou diametre homologue qui en joint les angles comme *B* & *C*. Il faut donc pour cela, entre le diametre *B* & une autre ligne *D*, à laquelle il soit comme 5 à 1 trouver une moyennne proportion-
* § n. 29. nelle *C* * ; de sorte que ∺ *B*. *C*. *D*, & sur
* § n. 95. cette ligne *C* décrire la figure *X* semblable à *A**,

ces deux figures *A* & X sont entr'elles comme les quarrez de *B* & *C* *, ou en raison doublée de *B* à * 5. n.73.
C, c'est-à-dire, comme *B* à *D*, ou 5 à 1 ce qu'il falloit faire.

Corollaire I.

98. *Donc il est facile de trouver une figure semblable à une donnée, & moindre qu'une autre d'une certaine figure donnée.*

Car il n'y a qu'à la ligne *B*, côté de la figure donnée, en prendre une autre D qui lui soit dans la proportion requise, & entr'elles trouver, suivant ce qui a été enseigné*, la moyenne pro- * 5 n. 2.
portionnelle C, & sur icelle comme côté décrire une figure semblable à la donnée*, laquelle * 5 n. 8
sera la cherchée, suivant ce Problême.

Corollaire II.

99. *Il est également facile de trouver une figure semblable à une donnée, & plus grande qu'une autre d'une certaine figure donnée.*

C'est une semblable construction que la précedente.

SECTION V.

De la Commensurabilité ou Incommensurabilité des Lignes & des Surfaces.

100. *Les grandeurs sont dites Commensurables, lorsqu'elles peuvent être mesurées par une troisiéme, qui est ainsi leur commune mesure.*

La commune mesure d'une toise & d'un pié, c'est le pouce qui se trouve exactement douze

fois dans un pié, & soixante-douze fois dans une toise.

DEFINITION II.

101. *Les grandeurs Incommensurables, sont celles qui ne peuvent être mesurées par aucune commune mesure.*

Une hauteur de sept piés ne peut être mesurée exactement par une toise; mais elle le peut être par une mesure plus petite, comme par un pié & par un pouce. Ainsi deux grandeurs ne sont incommensurables que lorsqu'on ne peut trouver de mesure, pour petite qu'elle soit, qui les puisse mesurer précisement.

COROLLAIRE.

102. *Donc deux grandeurs qui ont un rapport infini, sont incommensurables entr'elles.*

Car si elles étoient commensurables, leur commune mesure détermineroit leur rapport. Celui du point à la ligne est infini; car on ne peut point déterminer en quelque ligne que ce soit, combien il y a de points, puisqu'on la peut diviser à l'infini. De même entre une ligne & une surface le rapport est infini; car dans une surface on y concevra tant de lignes qu'on voudra, comme dans un solide des surfaces.

DEFINITION III.

103. *L'on appelle Rationnelle une grandeur connuë & déterminée, par rapport à une autre dont la valeur se peut exprimer par nombre.*

Grandeur Rationnelle est celle à laquelle on rapporte toutes les autres, & sur laquelle on raisonne; ainsi on la suppose connuë.

DEFINITION IV.

104. *Deux grandeurs qui ne sont pas commensura-*

bles en elles-mêmes, le sont en puissance si leurs quarrez ou leurs cubes sont commensurables.

Si *b* & *c* sont incommensurables, mais que leurs quarrez soient commensurables, que par exemple *bb* soit à *cc* comme 3 à 5, alors *b* & *c* incommensurables en eux-mêmes, sont commensurables en seconde puissance. Si *x* & *z* n'étoient pas commensurables ni leurs quarrez *xx* & *zz*, mais que leurs cubes *xxx* & *zzz* ou x^3, z^3 le fussent : par exemple, que x^3 fût à z^3 comme 10 à 13, alors *x* & *z* incommensurables en eux-mêmes & en seconde puissance, seroient commmensurables en troisiéme puissance.

DE'FINITION V.

Nombre quarré, c'est le produit d'un nombre multiplié par lui-même. 105.

Ainsi 9 est un nombre quarré, parce que c'est le produit de 3 multiplié par 3, qui en est la racine.

DE'FINITION VI.

Nombre cube, c'est le produit d'un nombre quarré multiplié par la racine de ce quarré, c'est-à-dire, par le nombre qui l'a produit. 106.

Ainsi 8 est un nombre cube fait de 4 nombre quarré multiplié par 2 racine de ce quarré, c'est-à-dire, de 2, qui multiplié par lui-même, a fait ce quarré 4.

DEFINITION VII.

Nombre non quarré, c'est celui dont la racine quarrée ne se peut exprimer par aucun nombre. 107.

DEFINITION VIII.

Nombre non cube, c'est celui dont la racine cube ne se peut exprimer par aucun nombre. 108.

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 ſont des nombres qui n'ont point de racine quarrée qui ſe puiſſe exprimer par des nombres; car on ne peut point trouver aucun nombre, qui multiplié par lui-même, faſſe ou 2, ou 3, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 10, &c. Ces nombres, à la reſerve de 8, ne ſont point auſſi des nombres cubes, car il n'y a aucun nombre, qui multiplié cubiquement, les puiſſe produire.

DEFINITION IX.

109. *Nombres expoſans d'une raiſon, ſont les plus petits nombres qui l'expriment.*

Ainſi ſi *x* eſt à *z* comme 6 à 12, les expoſans de la raiſon de *x* à *z* ſeront 1 & 2, qui ſont les plus petits nombres qui puiſſent être entr'eux, comme 6 & 12.

Lorſqu'on joint deux grandeurs qui ne ſont pas commenſurables, & à qui par conſequent on ne peut pas donner le même nom, ou que l'on eſt obligé d'exprimer par deux noms differens, cela s'appelle un Binome. *Lorſque d'une grandeur on en retranche une autre qui lui eſt incommenſurable, & qu'ainſi on ne les peut exprimer avec un ſeul ſigne, c'eſt bien un* Binome; *mais pour diſtinguer cela de ce qui ſe fait quand on joint deux grandeurs incommenſurables, on l'appelle* Apotome, *ou Réſidu, ou Grandeur diminuée. Je n'expliquerai point ici les termes, que j'ai déja expliqué dans les Elemens de Mathematiques.*

PROPOSITIONS EVIDENTES.

PROPOSITION I.

110. *Deux nombres ſont toûjours commenſurables*

entr'eux, car ils ont au moins l'unité pour leur commune mesure.

Par exemple, dans ces deux nombres 77 & 81, comme dans tous les autres, l'unité s'y trouve précisément tant de fois, ainsi elle en est la mesure commune.

PROPOSITION II.

Lorsque d'un nombre on en retranche un autre, 111.
le reste est un nombre.

Car il reste une ou plusieurs unitez.

PROPOSITION II.

Les lignes & les surfaces qui sont comme nom- 112.
bre à nombre, sont commensurables; & celles qui sont incommensurables ne sont pas comme nombre à nombre.

C'est une suite des Définitions précédentes.

PROPOSITION IV.

Deux grandeurs commensurables à une troi- 113.
siéme, sont commensurables entr'elles.

Car si *B* & *Z* sont commensurables, on peut exprimer avec des nombres leur rapport. Si *C* & *Z* sont pareillement commensurables, on exprimera leur rapport avec des nombres; ainsi toutes ces trois grandeurs se marqueront avec des nombres: partant elles sont commensurables.

PROPOSITION V.

Une ligne, racine ou côte d'un quarré qui n'est 114.
pas un nombre quarré, n'est pas rationnelle. Elle le seroit si son quarré étoit égal à un nombre quarré.

La racine d'un nombre qui n'est pas quarré ne se peut point exprimer par aucun nombre;

ainsi toute ligne qui est égale à cette racine, ne se peut point marquer par aucun nombre.

PROPOSITION VI.

115. *Si les quarrez de deux lignes ne sont pas entre-eux comme deux nombres quarrez, ces deux lignes ne sont pas commensurables.*

Ces lignes sont égales chacune à la racine d'un nombre qui n'est pas quarré, ainsi aucun nombre ne les peut exprimer; elles ne sont donc pas commensurables.

PROPOSITION VII.

116. *Un quarré rationnel ne peut être égal à deux quarrez, dont l'un soit rationnel & l'autre ne le soit pas.*

*n. 111. C'est ce qu'on a dit, Proposition seconde *: Qu'ôtant d'un nombre un autre nombre, le reste est un nombre; Ainsi si d'un quarré rationnel, c'est-à dire, qui est un nombre, on ôte un quarré rationnel, c'est-à-dire, un nombre, le reste doit être un quarré rationnel ou un nombre.

PROPOSITION VIII.

117. *Une ligne commensurable étant divisée en deux parties, si l'une est commensurable, l'autre le sera aussi.*

Car cette ligne s'exprimera par un nombre, dont ayant ôté une partie commensurable, c'est-à-dire, un nombre, le reste selon la seconde Proposition, sera un nombre.

PROPOSITION IX.

118. *Si à une ligne commensurable on en ajoûte une commensurable, le tout sera commensurable.*

Cela est évident, un nombre ajoûté à un nombre fait un nombre.

PROPOSITION X.

Si d'une ligne commensurable on retranche une incommensurable, le reste est incommensurable. 119

Car si l'une étoit commensurable, l'autre le seroit aussi selon la huitiéme Proposition.

PROPOSITION XI.

Quatre lignes étant en proportion, si la premiere est commensurable à la seconde, la troisiéme le sera à la quatriéme. Si la premiere est incommensurable avec la seconde, la troisiéme le sera à la quatriéme. 120

Cela veut dire, que si la raison de la premiere à la seconde se peut exprimer par nombre; celle de la troisiéme à la quatriéme, qui est la même, se peut aussi exprimer par nombre. Si la premiere raison ne se peut pas exprimer, il en est de même de la seconde raison.

PROPOSITION XII.

Le quarré d'une ligne, qui est rationnelle, est un nombre quarré; son cube est aussi un nombre cube. 121

Cela est évident.

THEOREME I.

Si les raisons simples sont de nombre à nombre, les raisons doublées qui en sont composées auront pour exposans des nombres quarrez, & les raisons triplées auront des nombres cubes. 122

Soit cette raison simple de b à d : donc la raison de b^2 à d^2 est doublée. Or b & d se pouvant exprimer par nombres, leur quarrez le pourront; Ainsi b^2 & d^2 seront égaux à des nombres quarrez; ainsi b^2 & d^2, seront entr'eux comme des nombres quarrez. Par les mêmes

raiſons, b^3 & d^3. ſeront entr'eux comme des cubes.

THEOREME II.

123. *Une raiſon ſimple eſt ſourde, ſi la raiſon qui en eſt doublée ou triplée eſt ſourde.*

Car par le Theorême précedent, ſi cette raiſon n'étoit pas ſourde, la raiſon doublée auroit pour expoſant un nombre quarré, & la raiſon triplée un nombre cube.

THEOREME III.

124. *Une raiſon ſimple n'eſt pas ſourde, ſi les nombres expoſans de ſa raiſon doublée ſont quarrez, & les expoſans de la raiſon triplée ſont des cubes; & ſi cela n'eſt pas, elle eſt ſourde.*

Car les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs côtez ou racines, & les nombres cubes triplée de leur racine*; ainſi les racines des expoſans d'une raiſon doublée ou triplée, ſeront les expoſans de la raiſon ſimple; qui par conſequent ne ſera pas ſourde. Par la même raiſon ſi ces nombres ne ſont pas quarrez ou cubes; comme leurs racines ſont les expoſans des raiſons ſimples, ces raiſons ſimples ne ſe pouvant exprimer par nombre elles ſont ſourdes.

* L. 2. n. 73. & 75.

LEMME.

125. *Quatre lignes étant en proportion, le produit des antecedens eſt à celui des conſequens, comme le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond terme.*

Soient *a. b* :: *c. d.* Il faut prouver que *ac. bd* :: *aa. bb*; *bc* produit des moyens diviſé par le premier terme eſt égal au quatriéme*; ainſi $\frac{bc}{a}$ ſe peut mettre pour *d*; partant

* L. 3. n. 60.

$\frac{bbc}{a} = bd$. Ainsi il faut démontrer que ac. $\frac{bbc}{a}$ :: aa. bb. Multipliez ac & $\frac{bbc}{a}$ par a, & vous aurez aac & bbc, & divisez ses produits par c, restera aa & bb. La même raison demeure toûjours* ; donc ac. bd :: aa. bb; ce qu'il falloit prouver. *L. 3. n. 54. & 55.

Theoreme IV.

Quatre lignes commensurables étant en proportion, le rectangle ou produit des antecedens, est à celui des consequens comme deux nombres quarrez. 126.

Soient ces quatre lignes commensurables & proportionnelles a. b :: c. d ; par le Lemme précedent ac. bd :: aa. bb. Or a & b sont supposez commensurables ; leurs quarrez sont donc un nombre quarré : donc ac & bd sont entr'eux, comme deux nombres quarrez.

Lemme.

Six lignes étant proportionelles, le produit des antecedens est à celui des consequens, comme le cube du premier terme est au cube du second terme. 127.

Soient a. b :: c. d :: e. f. Il faut prouver que ace, bdf :: aaa. bbb ; $\frac{bc}{a} = d$, & $\frac{be}{a} = f$* : donc $bdf = \frac{b^3ce}{aa}$. Or en multipliant ace & $\frac{b^3ce}{aa}$ par aa, & divisant les produits de cette multiplication a^3ce & b^3ce par ce, après cela vient a^3, b^3, la même raison demeure toûjours* ; partant ace. bdf :: a^3 b^3 ; ce qu'il falloit prouver. *L. 3. n. 60. *L. 3. n. 54. & 55.

THEOREME V.

128. *Six lignes commensurables étant en proportion, le produit des antecedens est à celui des consequens comme deux nombres cubes.*

Soient $a. b :: c. d :: e. f$, par le Lemme précedent $ace. bdf :: a^3. b^3$. Or a & b étant commensurables, se pourront ainsi exprimer par
* 3. n. 103. nombres*, a^3 & b^3 sont deux nombres cubes; par consequent ace & bdf sont comme deux nombres cubes.

THEOREME VI.

129. *Si trois lignes sont en proportion continue, & que la premiere soit à la troisiéme comme deux nombres quarrez, ces trois lignes seront commensurables.*

Soit cette proportion continuë $\div a. b. c.$ Si la raison a à c est de nombre quarré; je dis que la raison de a à b sera une raison de nombre à nombre: car la raison de a à c est doublée de celle de a à b, ou comme le quarré de a au quarré de
* L. 3. n. 86. b*; & par consequent par le Theorême troisiéme*, cette raison doublée étant comme nom-
* 3. n. 124. bres quarrez, la raison simple dont elle est composée n'est pas sourde.

COROLLAIRE.

130. *En ce cas le rectangle des extrêmes & ses cotez sont commensurables avec le quarré de la moyenne, & son côté.*

Car 1°. puisque par la supposition $\div a. b. c$,
* L. 3. n. 57. il s'ensuivra $ac = bb$*; & ainsi ac commensurable avec bb. 2°. Par le present Theorême les côtez a, b, c sont commensurables.

THEOREME VII.

131. *Si trois lignes sont en proportion, & que la*

premiere soit à la troisiéme comme deux nombres, dont le produit n'est pas un nombre quarré (ou qui ait pour exposans deux nombres qui ne sont pas quarrez) *la moyenne sera incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec la premiere & la troisiéme.*

Soit ∺ *b. c. d* : la premiere *b* de ces trois lignes est à *d* la troisiéme, comme ces nombres 2 & 9, dont le produit 18 n'est pas un nombre quarré. Je dis que la seconde ligne *c* sera incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec la premiere & la troisiéme. Son quarré *cc* est égal à *bd*, ou à 18*. Or 18 n'étant * L. 3. n.
pas un nombre quarré, sa racine *c* ne se peut 57.
point exprimer par nombre ; ainsi *c* est incommensurable en elle-même avec *b* & *d* ; mais sa puissance *cc*, qui vaut 18, l'est avec *b* & avec *d*, c'est-à-dire, avec 2 & avec 9, puisque sa raison s'exprime par des nombres,

THEOREME VIII.

Si de trois lignes en proportion continuë, la 132.
premiere n'est pas à la troisiéme comme nombre à nombre, la moyenne est incommensurable avec elles, tant en elle-même qu'en puissance.

Soit cette proportion ∺ *b. c. d*, dont la premiere *b* n'est pas à *d* comme nombre à nombre : je dis que *c* ni sa puissance *cc* ne sont pas commensurables avec *b* & *d* : car la raison de *b* à *d* est doublée de celle de *b* à *c*, & de *c* à *d**. Cette * L. 3. n.
raison doublée étant donc sourde, la raison sim- 83.
ple de *b* à *c* ou de *c* à *d* est donc sourde par le Theorême second*. * S n. 123.

Le quarré de *b* est au quarré de *c* comme *b* est à *d**. Donc puisque *b* n'est pas à *d* comme * L. 3. n.
nombre à nombre, *bb* & *cc* ne sont pas comme 84.

nombre à nombre ; ainsi ce sont des incommen-
*3.n.112. surables *.

THEOREME IX.

133. *Si de quatre lignes en proportion continuë, la raison de la premiere à la quatriéme est une raison de nombre à nombre, qui ait pour exposans des nombres cubes ; ces quatre grandeurs seront commensurables.*

Soit ÷ *b. c. d. f.* si *b. f* : : 1. 8, ces quatre lignes *b*, *c*, *d*, *f* sont commensurables : car la
*L. 3. n. 83. raison de *b* à *f* est triplée *. Ces deux nombres 1 & 8 sont cubes ; cette raison les ayant donc pour exposans la raison simple comme celle de cette progression qui est entre chaque terme,
*3.n.124. ne peut être sourde *, selon le Theorême troisiéme.

THEOREME X.

134. *Si de quatre lignes en proportion continuë la raison de la premiere à la quatriéme a pour exposans des nombres qui ne sont pas cubes*, la premiere & la seconde *seront seulement commensurable en puissances ; ainsi de même de la seconde & de la troisiéme.*

Soit ÷ *b. c. d. f*, & que *b. f* : : 1. 5. La
*L. 3. n. 83. raison de *b* à *f* est triplée de celle de *b* à *c* *. Or 1 & 5, les exposans de la raison de *b* à *f* ne sont pas cubes ; la raison simple de *b* à *c* est donc
*3.n.124. une raison sourde * : ainsi de même de la raison de *c* à *d*, de celle de *d* à *f*. Mais puisque b^3.
*L. 3. n. 87. c^3 : : *b. f* ; & par consequent b^3. c^3 : : 1. 5 * : donc *b* & *c* sont commensurables en puissance.

THEOREME XI.

135. *Si de quatre lignes en proportion continuë, la*

premiere n'est pas à la quatriéme comme nombre à nombre, la raison de la premiere à la seconde n'est pas de nombre à nombre.

∺ *b. c. d. f*; la raison de *b* à *f* est triplée; donc cette raison triplée étant sourde, par le Theorême second, la raison simple de *b* à *c* est sourde; & puisque $b^3 . c^3 :: b . f$, cette raison de *b* à *f* étant sourde, celle de b^3 à c^3 est sourde. Ainsi *c* n'est pas commensurable en puissance avec *b*.

Probleme I.

Trouver une ligne qui soit incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec une ligne connuë. 136

Soit *b* une ligne; on en cherche une qui lui soit incommensurable. La ligne *b* étant 2, je prend *x* une ligne égale à 3 ou à 5, ou à tout autre nombre qui ne soit pas quarré. Entre ces deux lignes je cherche une ligne moyenne proportionnelle, que je nomme *c*: ainsi ∺ *b. c. x*. Or par le Theorême septiéme la ligne *c* sera incommensurable en elle-même avec ces deux premieres lignes, & commensurable en puissance*. *$\bar{s}$ n. 134

Probleme II.

Trouver une ligne qui soit incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec une ligne connuë & donnée. 137

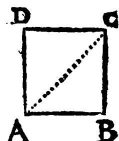
Soit la ligne donnée & connuë *B*, je lui cherche par le Problême précedent la ligne *D*, qui lui soit incommensurable en elle-même. Après, entre *B* & *D*, ayant trouvé la ligne *C* moyenne proportionnelle; cette ligne par le Theorême huitiéme * sera incommensurable, *$\bar{s}$ n. 135

tant en elle-même qu'en puissance avec *B*; ce qu'il falloit faire.

THEOREME XII.

138. *La diagonale d'un quarré est incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance avec chacun des côtez.*

Soit le quarré *ABCD*. Il faut prouver que *AC*, sa diagonale, est en elle-même incommensurable avec *AB*; mais qu'elle l'est en puissance.



Soit $AB = a$; puisque $BC = AB$: donc $BC = a$: donc

* § n. 78. $aa + aa = \overline{AC}^2$* : donc $aa \cdot \overline{AC}^2 :: 1 . 2$; ainsi voilà la diagonale commensurable en puissance. Or 2 n'est

* § n. 106. pas un nombre quarré* : donc *AC*, racine de

* § n. 114. $\overline{AC}^2$ ne peut s'exprimer par nombre*; ainsi elle

* § n. 115. est incommensurable en elle-même*; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XIII.

139. *Les deux parties d'une ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raison, ne sont pas rationnelles*, Eucl. XIII. Prop. 6.

Soit *CB* ligne rationnelle coupée en moyenne & extrême raison au point *A*; je dis que les parties *AC* & *AB* ne sont pas lignes rationnelles; ou, ce qui est la même chose, qu'elles ne peuvent être exprimées par des nombres. J'ajoûte à *CB* la ligne *BD* moitié de *CB*, le quarré de la médiane *AB*



jointe avec B D, vaut cinq fois le quarré de BD*; ainsi ces deux quarrez sont comme 5 à* 1. Or 5 n'est pas un nombre quarré : donc par le Theorême*, la ligne A B + B D n'est pas* rationnelle, mais B D moitié de A B ligne rationnelle, est rationnelle; il faut donc que ce soit la mediane A B qui ne soit pas rationnelle : & partant * la petite partie AC sera incommensurable; car si elle étoit commensurable, AB le seroit aussi *.

* 5 n. 66.
* 5 n. 114.
* 5 n. 119.
* 5 n. 117.

COROLLAIRE.

La médiane est incommensurable avec la toute, tant en elle-même qu'en puissance. 140.

Soit b une ligne coupée en moyenne & extrême raison, x est la médiane, & $b - x$ la petite, $\div\!\div\ b.\ x.\ b - x$. Or puisque $b - x$ est une ligne non rationnelle par le Theorême present, donc par le Theorême huitiéme* x, moyenne* entre b & $b - x$ est incommensurable avec b, tant en elle-même qn'en puissance.

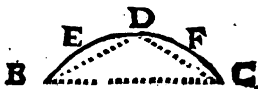
* 5 n. 132.

SECTION VI.

Des raisons des Cordes avec les rayons du Cercle.

AVERTISSEMENT.

Les Cordes d'un même Cercle ne sont pas entr'elles comme les Arcs dont elles sont les Cordes : ces deux Arcs BED *&* CFD *étant égaux, l'Arc* BDC *est double de* 141.



l'un & de l'autre. Si BC, *corde de cet arc, étoit donc le double de la corde*

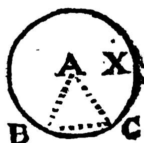


BD *ou de la corde* DC, *comme l'arc* BDC *est le double de l'arc* BED; *alors* BC *seroit égal à*
*L. 1. n. 32. BD + CD; *ce qui ne peut être* *. *On ne peut donc pas supposer que les cordes d'un même cercle soient entr'elles comme les arcs dont elles sont les cordes.*

THEOREME I.

142. *Le rayon du cercle est égal à la corde de soixante degrez.*

L'angle du centre d'un exagone est de 60 degrez sixiéme partie de 360 degrez, que valent les quatre angles droits qu'on peut concevoir au tour du centre. Soit donc *BAC* un angle de 60 degrez; ainsi *BC* est le côté de l'exagone qu'il faut prouver égal au rayon *AB* ou *AC*. Le triangle *BAC* est isocelle; ainsi les angles sur la base sont égaux; mais celui du sommet est de 60, ainsi tous deux ensemble valent 120, partant chacun 60. Ce triangle est donc équilateral: partant *BC* = *AB*, ou *BC* = *AC*; ce qu'il failoit prouver.



COROLLAIRE I.

143. *Un cercle étant donné faire un exagone.* Eucl. IV. Prop. 15.

Le compas ouvert de la grandeur du rayon je divise le cercle en six parties.

COROLLAIRE

COROLLAIRE II.

Il est facile de faire un triangle equilateral dans un cercle. 144

Car deux parties des six de l'exagone, sont la troisiéme partie du cercle.

COROLLAIRE III.

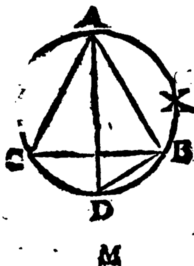
La raison de la circonference du cercle au rayon, est plus grande que 3 à 1. 145

Chaque côté d'un exagone étant égal au rayon, les six côtez seront égaux à trois fois le diametre; ainsi la circonference de ce polygone est au rayon du cercle où il est inscrit, comme 3 à 1. Or la circonference de ce cercle est plus grande que celle de l'exagone, chaque portion du cercle étant plus grande que le côté de l'exagone qui lui sert de corde.

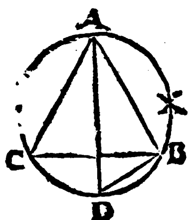
THEOREME II.

Le quarré d'un des côtez du triangle équilateral inscrit dans un cercle, est triple du quarré du demi diametre ou du rayon de ce cercle. 146
Eucl. XIII. Prop. 12.

Soit *ABC* un triangle équilateral inscrit dans le cercle *X*; soit mené le diametre *AD* qui coupe la corde *BC* perpendiculairement en deux parties égales*. Il faut prouver que le quarré de *AB* est triple de celui du rayon; puisque *BC* est la corde du tiers du cercle, *BD* sera la corde de la sixiéme partie, & partant égale au rayon,



* L. 1. n. 90.



dont le diametre *A D* est
* 1 n.142. le double *. Ainsi si *B D* $= b$, il faut que *A D* $= 2b$, & $\overline{AD}^2 = 4bb$. Soit *A B* $= a$; puisque *ABD* est rectangle : donc
* 1 n.78. $aa + bb = \overline{AD}^2$ *. Ainsi $aa + bb = 4bb$. Otant bb de part & d'autre, restera $aa = 3bb$; ce qu'il falloit démontrer.

AVERTISSEMENT.

147. *Je ne veux pas grossir ces Elemens de plusieurs Theorêmes semblables. Il est évident que la tangente d'un angle de quarante-cinq degrez est égale au rayon : car elle fait avec ce rayon un triangle rectangle dont la secante est la base, sur laquelle les angles sont égaux, sçavoir chacun de quarante-cinq degrez. Ainsi, 1°. il faut que cette tangente & le rayon soient égaux. 2°. Le*
* 1 n.78. *quarré de la secante * est égal au quarré du rayon & de la tangente, ou ce qui est la même chose à deux fois le quarré du rayon. Or la corde de nonante est égale à la secante de quarante-cinq degrez : par consequent la corde de nonante est égale à deux fois le quarré du rayon, comme il est évident.*

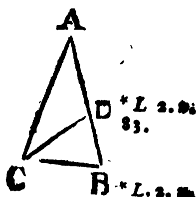
LEMME PREMIER.

148. *Dans un triangle isocelle, si les angles de la base sont doubles de celui du sommet, je dis que la ligne qui coupe par la moitié un des angles de la base, coupe le côté opposé* A B *en moyennne & extrême raisrn.*

Soit *B A C* ce triangle isocelle, & que la ligne *C D* coupe par la moitié *B C A* un des

angles de la base, il faut prouver qu'elle coupe *AB* en moyenne & extrême raison au point *D*.

1°. Puisqu'on suppose que l'angle *BCA* est double de *BAC*; donc la moitié *DCA* sera égale à l'angle *CAD* : partant le triangle *ADC* ayant sur sa base *AC* les angles égaux il sera isocele*, & aura ses côtez *AD* & *DC* égaux. * L. 2. n. 83.



2°. L'angle *BDC* est égal aux deux opposez *DAC* & *ACD* *; par consequent il est égal à l'angle *ACB* qui vaut ces deux angles, & à *DBC* qui est égal par l'hypothese à *ACB*; ainsi le triangle *DCB* ayant les angles sur la base *DB* égaux, est encore isocele; ainsi *DC* = *BC*. * L. 2. n. 73.

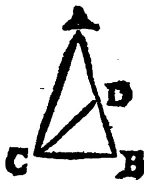
3°. Les deux triangles isoceles *BAC* & *BDC*, qui ont un angle commun au point *B* *, sont équiangles, & partant semblables: donc* *AB* est à *BC*, ou à *AD* son égal, comme *DC*, ou son égal *AD* est à *DB*, c'est-à-dire, ∻ *AB*. *AD*. *DB*; & par consequent *AB* est coupé en moyenne & extrême raison, puisque la partie *AD* est moyenne entre la toute *AB*, & l'autre partie *DB* *. * L. 2. n. 85. * 3 n. 10. * 3 n. 14.

LEMME II.

Décrire un triangle isocelle, qui ait chacun des angles sur la base double de l'autre. Euclid. IV. Prop. 10. 142.

Ayant la ligne *AB*, il la faut diviser en moyenne & extrême raison au point *D* *, de *B* & de *D*; & de l'intervalle de la mediane *AD*, je fais deux arcs qui se coupent au point *C*. Ainsi *BC* = *DC* = *AD*. Les deux triangles *ADC* & *DCB* sont donc isocelles. Par la même con- * 3 n. 14.

ſtruction ÷ *AB*. *AD*. *DB*.
Mettant en la place des lignes égales *AB*. *BC* :: *BC*. *BD*; donc *BAC* & *DBC* ſont ſemblables, ou équiangles* & iſocelles. Or l'angle *BDC* eſt égal à *DAC* + *ACD* les oppoſez interieurs qui ſont égaux, puiſque *ADC* eſt iſocelle: Donc *DBC* égal à *BDC* eſt le double de *BAC*; ce qu'il falloit prouver.

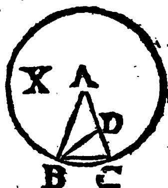


* n. 13.

LEMME III.

150. *Dans un triangle iſocelle, dont le ſommet eſt au centre du cercle, & qui a pour baſe le côté du decagone, chaque angle de la baſe eſt double de celui du ſommet.*

Le triangle iſocelle *BAC*, a ſon ſommet au centre de X. Sa baſe *BC* eſt le côté d'un décagone, & par conſequent la corde d'un arc de 36 degrez dixiéme partie de 360 degrez que vaut le cercle. Il faut prouver que chaque angle de la baſe *CBA* & *ACB*, vaut 72 degrez double de 36; ce qui eſt évident, car les trois angles valent 180 degrez*. Si on ôte 36 de ce nombre, pour la valeur de l'angle du ſommet, reſte 144 pour les angles de la baſe, qui étant égaux, chacun ſera de 72 double de 36.



* L. 2. n. 71.

THEOREME III.

151. *La mediane du rayon coupé en moyenne & extrême raiſon eſt le côté du décagone, ou la corde de trente-ſix degrez.* Euclid. IV. Prop. 10. (*Fig. ci-deſſus.*)

Soit *AC* rayon d'un cercle diviſé en *D* en

moyenne & extrême raison*, & qu'on ait fait *3 n. 34 la corde *BC* égale à la mediane *AD*, alors les angles sur la base *BC* seront chacun double de *BAC** : donc par le Lemme précedent *BC* est *3 n. 149 la corde de la dixiéme partie du cercle, & par consequent le côté du décagone.

Lemme IV.

152 *Dans un pentagone ayant tiré deux lignes d'un de ses angles aux extremitez du côté opposé cela fera un triangle isocelle, & chaque angle sur la base sera double de celui du sommet.*

Z est un pentagone regulier. De *A* ayant mené aux extrémitez du côté opposé *BC* deux lignes, cela fera le triangle *BAC*, qu'il faut prouver être isocelle, & que *ABC* & *BCA* sont chacun double de *BAC*.



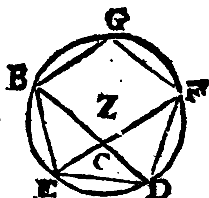
1°. *AB* & *AC* cordes d'arcs égaux, sont égales : donc *BAC* est isocelle*. *L. 1. n. 31. & L. 2. n. 57.

2°. L'angle *BAC* a pour mesure la moitié de l'arc *BC*, & l'angle *ACB* la moitié de l'arc *AEB**. Or *AEB* est double de *BC* : *L. 2. n. 39. donc l'angle *ACB* est double de l'angle *BAC*. On prouvera de même que *ABC*, est double de *BAC*.

Theoreme IV.

153 *Dans un pentagone, si deux lignes cordes du double de l'arc que soûtient chacun de ses côtez se coupent, elles sont coupées en moyenne & extrême raison, & la mediane ou la plus grande partie est un des côtez du pentagone.*

Dans le pentagone *Z*, que je suppose regulier, inscrit dans un cercle les lignes *BD* & *EF*, chacune corde du double de l'arc dont chaque côté du pentagone est la corde, se coupent. Il faut prouver qu'elles le font en moyenne & extrême raison, & que la mediane ou la plus grande partie, telle que *BC*, est un des côtez du pentagone.



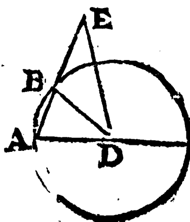
1°. L'angle *BEF* a pour mesure la moitié des deux
* L. 2. n. arcs *BG* & *GF**, & l'an-
39. gle *BCE*, la moitié des
* L. 2. n. deux arcs *BE* & *FD**. Or
52. ces deux mesures sont égales : donc ces deux angles font égaux ; ainsi *EBC* est
* L. 2. n. isocelle*, & partant *BE* = *BC* : ainsi *BC* est
83. un des côtez du pentagone ; ce qu'il falloit prouver.

2°. Par la même raison *CF* = *FD* : & puisque *BD* = *FE* cordes des mêmes angles, il faut que *CE* = *CD* : ainsi *ECD* est un isocelle. Le triangle *BED* est aussi isocelle, puisque *BE* = *ED* ; car on suppose que *Z* est un pentagone regulier : ces deux isocelles ont un angle com-
* L. 1. n. mun à *D* ; donc ils sont équiangles*, partant
85 comme *BD* est à *BE*, ou à son égale *BC* ; ainsi
* 5 n. 10. *ED* ou son égale *BC* sera à *CD**, c'est-à-dire, ∺ *BD*. *BC*. *CD* & par consequent, selon la notion de la moyenne & extrême raison, *BD* est coupée comme il a été proposé.

THEOREME V.

154. *La ligne droite composée du côté de l'exagone & du décagone inscrits au même cercle, est coupée en moyenne & extrême raison.* Euclid. XIII. Prop. 9.

Soit *AB* côté du décagone, & *BE* côté de l'exagone, c'est-à-dire, une ligne égale au rayon *BD**; je dis que *AE* est coupée en moyenne & extrême raison au point *B*. *§ n. 142



EBD est isocelle, puisque *BE* est supposée égale au rayon *BD*; le triangle *ABD* est aussi isocelle, & l'angle *BAD* ou *ABD* est double de *BDA**. Or *DBA* est aussi double de *BDE*, puisqu'il est égal* aux deux angles égaux *BED*, & *EDB* : donc *BED*, & *BDA* sont égaux entr'eux, & pris ensemble ils sont égaux à *EAD*; ainsi le triangle *AED* est isocelle; partant puisque *BD* coupe en deux l'angle *EDA*, il faut que *EA* soit coupée en moyenne & extrême raison*, ce qu'il falloit démontrer. *§ n. 150. *L. 2. n. 73. *§ n. 148.

COROLLAIRE.

Delà il s'ensuit que si AE *est coupée en moyenne & extrême raison, dont* AB *segment soit côté d'un décagone,* BE *sera le côté de l'exagone inscrit au même cercle.* 155.

Puisqu'entre *AE* & *AB* il n'y peut avoir qu'une moyenne proportionnelle, & qu'on vient de prouver que *BE*, côté de l'exagone, étoit cette mediane.

PROBLEME I.

Un cercle étant donné, trouver la corde de trente-six degrez, ou le côté du décagone. Voyez la Figure de la page 268 num. 150. 156.

Le cercle est *X*, dont *AB* est le rayon, que je divise en moyenne & extrême raison en *D**, *§ n. 34.

Je prens la corde *BC* égale à *AD*, qui sera le
* § n. 151. côté du décagone *.

PROBLEME II.

157. *Décrire un décagone sur une ligne donnée pour côté.*

Je divise le côté donné *BC* en moyenne & ex-
* § n. 34. trême raison, * je lui ajoûte la mediane ; ce qui me donne une nouvelle ligne *AC*, aussi divisée en moyenne & extrême raison, dont *B C* est la
* § n. 35. mediane * : de cette ligne *AC* je fais le rayon
* § n. 156. d'un cercle dont *BC* est le côté du décagone * ; au moyen de quoi j'acheve facilement le décagone requis.

PROBLEME III.

158. *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone, ou inscrire un pentagone dans un cercle.* Euclid. IV. Prop. 11.

* § n. 156. 1°. Ayant trouvé le côté du décagone * on a celui du pentagone, qui est la corde du double de l'arc qui soûtient un des côtez du décagone.

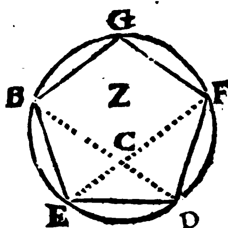
2°. On peut trouver encore le côté du pentagone de cette maniere. Il faut trouver un triangle isocelle, dont les angles de la base soient cha-
* § n. 149. cun double de celui du sommet *, & l'inscrire,
* L. 2. n. 100. ou un qui lui soit semblable dans le cercle don-
* § n 152. né * ; ce qui donnera un côté du pentagone *.

PROBLEME IV.

159. *Décrire un pentagone sur un côté donné.*

Soit le côté donné *ED*. Je suppose le pentagone fait ; en donnant le moyen de trouver les lignes *BD* & *EF*, on découvre ce qu'il faut faire. Or puisque *BD* est coupée en moyenne & ex-
* § n. 153. trême raison au point *C* *, que *BC* égale à *BE*, & par consequent à *ED*, est la mediane, en cou-

pant le côté *ED* en moyenne & extrême raison, & lui ajoûtant la mediane, on aura une ligne égale à *BD* *, coupée pareillement en moyenne & extrême raison, dont la mediane sera *ED*, par consequent égale à *BC*. *I n. 85.



Comme on connoîtra donc les trois côtez du triangle *DEB*, il sera facile de le faire & d'achever tout le pentagone, soit en circonscrivant un cercle au tour de ce triangle *, ou faisant de même le triangle *EFD*. *L. I. n. 87.

PROBLEME V.

Circonscrire un pentagone regulier à un cercle. 160.
Eucl. IV. Prop. 12.

Il faut, 1°. inscrire un pentagone dans le cercle donné : 2°. mener du centre de ce cercle des lignes droites par les cinq angles du pentagone : 3°. mener des tangentes par les points de la circonference où ces lignes coupent le cercle. Ces tangentes, comme il est évident, formeront le pentagone que l'on cherche.

PROBLEME VI.

Dans un pentagone regulier, inscrire un cercle. 161.
Eucl. IV. Prop. 13.

Il faut sur le milieu de deux côtez de ce pentagone, élever des perpendiculaires dont la section donnera le centre du cercle que l'on cherche, qu'il faut faire de l'intervale entre ce centre & le milieu d'un des côtez du pentagne, comme il est évident.

PROBLEME VII.

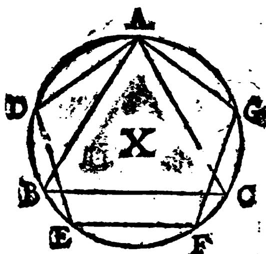
162. *Circonscrire un cercle à un pentagone.* Eucl. IV. Prop. 14.

Ayant trouvé comme dans le Probléme precedent le centre de ce cercle, il faut prendre l'intervale de ce centre & d'un des angles du pentagone, & ensuite décrire un cercle qui sera celui que l'on cerche.

PROBLEME VIII.

163. *Dans un cercle faire un poligone de quinze côtez.* Eucl. IV. Prop. 16.

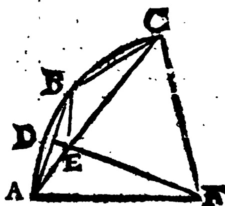
Le cercle *X* étant proposé pour y décrire un quindecagone, 1°. je le partage en six arcs égaux ; le rayon est la corde de chacun de ces arcs. 2°. Je prens deux de ces arcs, dont le double est la troisiéme partie ; ainsi la corde est un côté du triangle équilateral *ABC*. 3°. Je fais le pentagone *ADEFC*, dont chaque côté est la corde de l'arc cinquiéme partie du cercle. Celle de l'arc troisiéme partie de celui-ci, est le côté du quindecagone, dont cinq côtez font le tiers du cercle, & par consequent répondent au côté du triangle équilateral. Cela étant, *BE* est le côté du quindecagone qu'on cherche ; car à *AD* répondent trois parties de ce poligone, & autant à *DE*. Ainsi à *AD* & *DE* répondront six côtez Mais à *AB* répondent cinq parties ; ainsi reste *BE*, sixiéme partie de *AE*, pour le côté du quindecagone.



THEOREME VI.

Le quarré d'un des côtez d'un pentagone est égal aux quarrez d'un des côtez du decagone & de l'exagone, inscrits dans le même cercle. Eucl. XIII. Prop. 10. 164.

Soit *AC* le côté d'un pentagone. Ayant divisé l'ac *AC* en deux parties égales au point *B*, & mené les cordes *AB*, *BC*, elles seront les côtez du decagone, & *AF* ou *FC* rayons du cercle, seront les côtez de l'exagone. Il faut prouver que $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2$.



Soit menée la ligne *FD* coupant *AB* en deux parties égales, & du point *E* soit menée *EB*; l'on aura les deux triangles *ACF* & *ECF* qui sont semblables; car ils ont l'angle *C* commun: & l'angle *CFE* est égal à *FAC*, parce qu'ils sont tous deux d'un égal nombre de degrez, sçavoir de 54; car l'arc *BC* étant de 36 degrez & *BD* de 18, *DC* sera de 54, mesure de l'angle *CFD*, auquel est égale *CAF* à cause que le triangle *AFC* est isocelle, & que l'angle du centre est de 72 degrez. Ces triangles donc étant semblables $\div$ *AC*. *AF*. *EB* *: donc * $\overline{AF}^2 = AC \times EC$ *. * 5. n. 16. * L. 3. n. 57.

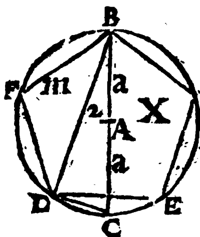
Maintenant le triangle isocelle *AEB* est semblable à *ABC* aussi isocelle; car ils ont un angle commun, sçavoir *A*; & par consequent tous les autres égaux * Donc $\div$ *AE*. *AB*. *AC*; donc * $\overline{AB}^2 = AE \times AC$; donc $\overline{AF}^2 + \overline{AB}^2 = AC \times EC + AE \times AC$. Mais ces deux rectan- * L. 2. n. 85.

* L. 3. n. 18. gles sont égaux au quarré de AC*; car $AE + EC = AC$. Donc $\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AB}^2$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

165. *Le quarré du côté du pentagone inscrit dans un cercle, & le quarré de la corde qui soûtient l'angle du polygone joints ensemble, valent cinq fois le quarré du rayon du cercle.*

Soit BF côté du pentagone $= b$, & BC diametre du cercle $= 2a$, & BD la soûtenante de l'angle F du pentagone $= d$. Il faut prouver que $\overline{BF}^2 + \overline{BD}^2 = 5\overline{AB}^2$, ou $bb + dd = 5aa$.



Soit mené $DC = c$, qui sera le côté du décagone, & formera le triangle rectangle BDC*. Donc $dd + cc = 4aa$*; mais par le Theorême précedent $bb = aa + cc$; joignant cette égalité avec la premiere, on aura pour somme $bb + dd + cc = aa + cc + 4aa$; retranchant cc de part & d'autre, $bb + dd = 5aa$; ce qu'il falloit prouver.

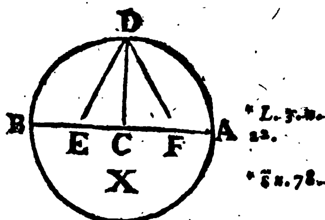
* L. 2. n. 44.
* 5. n. 78.

PROBLEME IX.

166. *Un cercle étant donné, trouver le côté du pentagone & du décagone d'une autre maniere que celle qui a été enseignée.*

Soit AB diametre du cercle donné, & son rayon CD perpendiculaire sur AB si l'on prend CE moitié de BC, & que du point E on mene ED, & qu'ensuite l'on prenne $EF = ED$

& qu'on tire DF; je dis que cette ligne sera le côté du pentagone cherché.



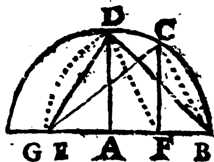
Car* $BF \times FC + \overline{EC}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{ED}^2$. Mais $\overline{FD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{FC}^2$*, ainsi $BF \times FC + \overline{EC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{EC}^2$: donc retranchant $\overline{EC}^2$ de part & d'autre, $BF \times FC = \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2$; & remettant cette égalité en proportion*, on aura $\div\!\div$ $BF. BC. FC$; donc* la ligne FB est coupée en moyenne & extrême raison : & puisque BC ou DC est le côté l'exagone, FC sera celui du decagone*. Mais $\overline{FD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$* : donc DF est le côté du pentagone* ; ce qu'il falloit trouver.

* L. 3. n. 23.
* § n. 78.
* L. 3. n. 58.
* § n. 34.
* § n. 154.
* § n. 78.
* § n. 164.

AVERTISSEMENT.

167.

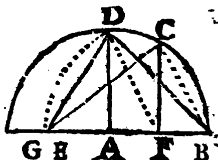
Cette operation s'abrege de cette maniere. On prend BC *égale au rayon du cercle* BD, *égale à la corde de nonante, ou au côté du quarré inscrit dans le cercle, &* CE *égale à* BD : *la ligne* DE *sera le côté du pentagone, &* AD *étant le rayon du cercle,* AE *sera le côté du décagone.*



Pour démontrer cette operation, de C *j'abaisse une perpendiculaire sur le rayon* AB, *& de* D *sur le centre* A, *la perpendiculaire* AD ; *ainsi*

BD *est la corde de nonante, à qui* CE *est égale.*

Soit posé AB, AD ou $BC = 2a$; ainsi BG * 3 n. 28. $= 4a$. Or * $\div$ $BG. BC. BF$, c'est-à-dire, $\div$ $4a. 2a. a$; donc BF est la moitié du rayon. Mais on a vû dans le present Theorême, que pour trouver ED côté du pentagone, on a fait $FE = FD$. Si donc dans la presente construction on prouve que cette égalité s'y rencontre, elle en sera la démonstration.



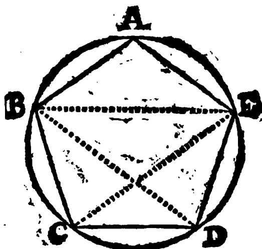
Puisque $FB = a$, FG sera $= 3a$, le rectangle * 3 n. 28. $GF \times FB$, c'est-à-dire, $3aa = \overline{FC}^2$ *. Or AB & * L. 3. n. 57. AD étant chacun $2a$, leurs quarrez seront ensemble $8aa = \overline{DB}^2$ * $= \overline{CE}^2$ * 3 n. 78. par la construction, lequel est égal $\overline{CF}^2 + \overline{EF}^2$. Si donc de $\overline{CE}^2 = 8aa$ on ôte $\overline{FC}^2 = 3aa$, restera $5aa$ pour $\overline{EF}^2$, à quoi est aussi égal $\overline{FD}^2$ puisqu'il * 3 n. 78. est égal * à $\overline{DA}^2 + \overline{AF}^2$, c'est-à-dire, à $4aa + aa$, partant $FD = FE$; c'est ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME VII.

268. *Si dans un pentagone équilateral trois angles pris comme on voudra sont égaux il sera équiangle.* Eucl. XIII. Prop. 7.

Soit le pentagone équilateral $ABCDE$, qui a trois de ses angles pris comme on voudra égaux, sçavoir, A, C, D; il faut prouver que tous

ſont égaux, que $C = B = E$.



Les triangles *BAE*, *BCD*, *CDE* étant iſocelles, dont les angles *A*, *C*, *D* égaux ſont compris par les côtez égaux, ils ſeront en tout égaux * ; & ainſi les baſes *BE*, *BD*, *CE* ſeront égales, comme auſſi tous les angles formez par les côtez égaux ſur les dites baſes ſeront égaux. De même les deux triangles *BEC*, *EBD* iſocelles ayant tous leurs côtez égaux auront auſſi les angles *EBC*, *ECB*, *BED*, *BDE* égaux *. Si à chacun des angles égaux *EBC*, *ECB* on ajoûte les égaux *ABE*, *DCE*, le total *B* ſera égal au total *C*. La même choſe eſt pour les angles *E* & *D*, partant tous ces cinq angles ſeront égaux ; ce qu'il falloit prouver.

* L. 1. n. 98.

* L. 1. n. 92.

THEOREME VIII.

169. *Quand le rayon d'un cercle eſt rationnel, le côté du décagone inſcrit dans ce cercle eſt incommenſurable, tant en lui-même qu'en puiſſance avec ce rayon.*

Soit *B* ligne rationnelle rayon d'un cercle, coupée en moyenne & extrême raiſon : *x* que je ſuppoſe être la mediane, ſera le côté du décagone *. Or la mediane *x* eſt incommenſurable, * Sn. 151. tant en elle-même qu'en puiſſance avec *B* *. * Sn. 140.

THEOREME IX.

170. *Lorſque le rayon d'un cercle eſt rationnel ;*

les côtez du pentagone inscrit dans ce cercle sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance avec ce rayon. Eucl. XIII. Prop. 11.

Soit *b* ligne, rationnelle rayon d'un cercle, *z* le côté d'un pentagone, & *x* le côté d'un décagone, inscrits dans le cercle dont *b* est le rayon.
T.n.164. Partant $bb + xx = zz$: donc puisque le quarré *xx* n'est pas rationnel, comme nous venons de le démontrer dans le dernier Theorême,
*T.n.116. le quarré *zz* ne peut être rationel *, par conséquent sa racine *z* n'est pas rationelle, puisque tout quarré qui n'est pas égal à un nombre quarré, ne peut avoir pour racine une grandeur précisément égale à un nombre, comme nous l'a-
*T.n.114. vons prouvé ci-dessus *.

De la quadrature du Cercle.

177.
*L.2.n.254. *Nous avons vû* que la surface du cercle est égale à un triangle, qui a pour hauteur le rayon de ce cercle, & pour base la circonference : ainsi une moyenne proportionnelle entre le rayon & la circonference, sera le côté d'un quarré égal au cercle. Mais pour trouver cette moyenne proportionnelle, il faudroit, le rayon étant donné, trouver une ligne droite égale à la circonference, qu'on ne peut trouver, à moins de connoître la raison du rayon à la circonference, qui n'est point connuë exactement, mais à peu près. Le cercle peut être pris pour un polygone d'un nombre infini de côtez ; le moyen donc le plus exact & le moins défectueux de trouver ladite raison, c'est de prendre le plus grand polygone qu'on pourra ; & de voir quelle est la raison de son circuit avec le diametre du cercle où il est inscrit. Archimede a consideré un polygone de nonante-six côtez, dont le circuit est au dia-*

metre du cercle comme 223 à 71, laquelle raison est moindre qne celle de la circonference du cercle au diametre, puisque ce polygone inscrit est plus petit que le cercle*. Archimede comparant un même polygone, mais circonscrit avec le diametre, il a trouvé que la raison de l'un à l'autre étoit comme 22 à 7, laquelle est plus grande que celle de la circonference du cercle avec le diametre, puisque ce polygone circonscrit est plus grand que le cercle. On a donc deux raisons, sçavoir celles de 223 à 71, & de 22 à 7, dont l'une est plus petite, & l'autre plus grande que la veritable qu'on cherche. Donnons un même consequent à ces deux raisons, les réduisant à celle-ci, selon ce qu'on a enseigné*.

* L. 3. n. 147.

* L. 3. n. 89.

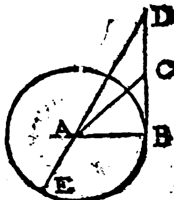
1561
 497
1562

Ayant ainsi supposé le diametre de 497 parties, la circonference du cercle sera plus grande que 1561, & plus petite que 1562. Divisons l'unité qui est la difference de ces deux nombres par 497, le quotient $\frac{1}{497}$ fera voir que la difference, dont l'un & l'autre nombre differe de la veritable grandeur de la circonference, est moindre que la $\frac{1}{497}$ partie du diametre; ce qui est peu de chose.

162. Ceux qui ont pris des polygones plus grands que de nonante-six côtez ont trouvé une raison plus exacte. Jean Pell en considere un de 256 côtez, dont chacun est plus petit que 24545, posé que le rayon du cercle soit de 1000000; ainsi la demie circonference de ce polygone est plus petite que 3141760. Si le diametre du cer-

ele étoit donc 100000, *tout le circuit de ce polygone circonscrit au cercle seroit plus petit que* 314176. *Or ce calcul qu'il fait dans un ouvrage imprimé à Amsterdam l'an* 1647. *ne suppose aucune extraction de racine. Il est fondé sur le Theorême suivant.*

THEOREME.



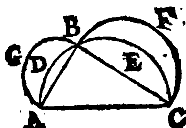
BC étant la tangente d'un arc moindre qu'un arc de quarante-cinq degrez; & *BD* la tangente d'un arc double; *BC* est à *BD* comme le quarré du rayon *AB*, moins le quarré de *BC*, est à deux fois le quarré du rayon *AB*.

Il faut démontrer que $BC . BD :: \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2$. Puisqu'on suppose que l'angle *BAD* est
* 8 n. 17. double de *BAC* : donc *AB*. *AD* :: *BC*. *CD* *, &
* L. 3. n. 49. *componendo* *AB*. *AD* + *AB* (ou *DE*) :: *BC*. *BD* *. Partant $\overline{AB}^2 . \overline{DE}^2 :: \overline{BC}^2 . \overline{BD}^2$ *.
* L. 3. n. 84. *Alternando*, $\overline{AB}^2 . \overline{BC}^2 :: \overline{DE}^2 . \overline{BD}^2$; donc *dividendo & componendo* $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2 :: \overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 . 2\overline{DE}^2$. Ainsi reste à démontrer que $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 . 2\overline{DE}^2 :: BC . BD$. Car alors $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 . 2\overline{AB}^2 :: BC . BD$. Puisque deux raisons égales à une troisiéme sont égales entr'elles. Or $\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + 2AE$
* L 3. n. 80. $\times AD + \overline{AD}^2$ *. Mais $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$ (ou
* L. 2. n. 140. $\overline{AE}^2$) $+ \overline{BD}^2$ *. Donc $\overline{DE}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD + \overline{BD}^2$. Donc retranchant $\overline{BD}^2$ de part & d'autre $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2AE \times AD$.

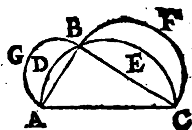
Or $\overline{2AE}^2 + 2AE \times AD = 2AE \times ED$ * : * L. 3. 29.
Donc $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2$ $2AE \times ED$. Ces deux rectangles $2AE \times ED$ & $2\overline{ED}^2$ ont la même base, sçavoir ED : ils sont donc entr'eux comme AE ou AB est à ED. Or AB. ED : : BC. BD : Donc $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2$ égal à $2AE \times ED$ est à $2\overline{ED}^2$ comme BC à BD ; ce qu'il falloit montrer.

173. *Suivant cette raison qu'Archimede établit de la circonference du cercle à son diametre, sçavoir celle de 22 à 7, ou de 44 à 14, ou de 66 à 21, qui est toûjours la même raison, la surface du cercle est au quarré de son diametre omme 11 à 14. Car soit nommée* m *la circonference du cercle, &* n *le diametre, multipliant* m *&* n *par* n, *alors* mn. nn : : m. n. * *Et* * L. 3. 14. *puisque* m. n : : 44. 14 : *donc* mn. nn : : 44. 14. *Donc le quart de* mn *sera à* nn *comme* 11 *le quart de* 44 *est à* 14. *Or le quart de* mn *est la surface du cercle* * : *donc cette surface est* * L. 2. n. 154. *à* nn *quarré du diametre, comme* 11 *est à* 14.

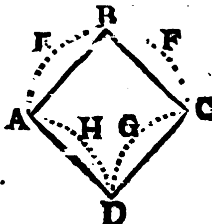
174. *Ainsi on auroit trouvé la quadrature du cercle, si on étoit assuré que la vraye raison de la circonference du cercle à son diametre, est comme 22 à 7 ; mais cette raison n'est pas juste, & on ne connoît pas encore quelle est la vraye. On connoît néanmoins en partie cette quadrature, c'est-à-dire, qu'on peut assigner une portion de cercle égale à une figure rectiligne ; car le triangle* ABC *étant rectangle, le demi cercle* ADBE *est égal aux deux demi cercles* AGB *&* BFC * * n. 79.



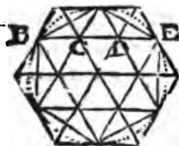
Otant donc les parties communes, sçavoir ABD & BCE, il restera AGBDA & CEBF comme deux lunes ou croissans, qui seront égales au reste du demi cercle ADBEC, lequel reste est le triangle ABC.

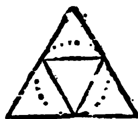
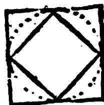


On voit aussi à l'œil que la figure AEBFCGDH, semblable au coûteau à pié des Cordonniers, est égale au quarré ABCD: car par la construction les parties AHD = AEB = BFC = CGD.



775. Les seules figures font voir qu'un triangle circonscrit à un cercle est quadruple de l'inscrit, que le quarré circonscrit est le double de l'inscrit, que l'exagone circonscrit est à l'inscrit comme 4 à 3. Remarquez ici en passant, que pour couper geometriquement une ligne comme BE en trois parties égales, il faut faire qu'elle soit le côté d'un triangle équilateral inscrit dans un cercle, après ayant fait l'exagone & coupé les côtez de l'exagone par des perpendiculaires, vous trouverez que les perpendiculaires couperont BE en trois parties égales BC, CD, DE.



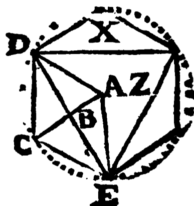



Voilà un Theorême général, qui donne une

connoissance fort étenduë, de ce qu'on peut sçavoir de cette matiere.

Quand deux polygones inscrits l'un à deux fois plus de côtez que l'autre, le plus grand est au plus petit, comme le rayon du cercle est à l'apothême du plus petit. 176

Z est un polygone dont l'apothême est A B, *&* X *un polygone qui a deux fois plus de côtez. La surface de* Z *est égale à autant de fois le triangle* D A E, *que* Z *a de côtez; & il est clair, qu'ajoûtant à chacun de ces triangles le triangle* DCE, *on aura la surface de* X *qui est à celle de* Z, *comme le romboïde de* AECD *est au triangle* DAE. *Or ces deux figures sont l'une à l'autre comme le rayon* AC *est à* AB, *qui est l'apothême de* Z; *car les surfaces des deux triangles* DAE *&* DCE, *qui ont même base, sont comme leur hauteur* AB *&* BC; *ainsi de tous autres polygones, dont l'un aura deux fois plus de côtez que l'autre.*



Si on divise le polygone X *pour en faire un qui ait deux fois plus de côtez, que je nomme* Y; *il en sera de même: & il est bon de remarquer que* Z, *le premier polygone, sera à ce troisiéme* Y *comme le plan de l'apothême du premier & du second est au quarré du diametre; ce que je démontre ainsi. Soit l'apothême du premier nommé,* m; *celui du second,* n; *& le rayon* k, *selon ce qui a été démontré.*

$$\begin{cases} Z.\ X :: m.\ k, \\ X.\ Y :: n.\ k. \end{cases}$$

En multipliant les antecedens par les antece-

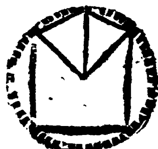
dens, & les consequens par les consequens,

ZX. XY :: mn. kk.

Or ZX. XY :: Z. Y; donc, Z. Y :: mn, kk. Le premier polygone Z sera au troisiéme polygone Y, comme mn plan de l'apothême du premier & du second est à kk quarré du rayon.

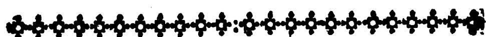
Par cette méthode on démontre que le premier polygone est au quatriéme, comme le solide fait de l'apothême du premier, du second & du troisiéme est au cube du rayon du cercle; ainsi de suite à l'infini.

177. L'apothême d'un quarré inscrit est la moitié d'un des côtez; ainsi un quarré est à un octogone, comme la moitié d'un de ses côtez est au rayon du cercle où il est inscrit; ou, ce qui est la même chose comme un de ses côtez est au diametre du cercle. C'est pourquoi on a droit de conclure qu'un quarré dans un cercle est à un polygone qu'on a fait d'une infinité de côtez en doublant toûjours les côtez, c'est-à-dire, d'un quarré qui fait un octogone, d'un octogone un polygone de seize côtez, ainsi de suite, lequel polygone peut être consideré comme un cercle. On peut, dis-je, conclure que le quarré est au cercle comme une grandeur faite de la multiplication de tous les apothêmes de ces polyloges, à la plus haute puissance du rayon du cercle: mais ce n'est presque rien sçavoir; car outre qu'on rencontre des raisons sourdes; le rayon & le diametre sont divisibles à l'infini; ainsi on ne peut point comprendre le nombre de tous ces apothêmes. Il est donc impossible d'arriver par cette voye enfin à un polygone égal à un cercle. Cette figure est ainsi incomprehensible, quoiqu'e le soit la plus simple de toutes les figures de Geometrie.





ELEMENS DE GEOMETRIE. OU DE LA MESURE DE L'E'TENDUE.



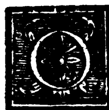
LIVRE CINQUIE'ME.

De la troisiéme espece d'étenduë, c'est-à-dire des Solides, comment les Solides se forment & se mesurent.

SECTION PREMIERE.

Des Sections & Rencontres des Plans; dont on peut concevoir qu'un Solide est formé.

AVERTISSEMENT.



N *peut concevoir qu'un Solide, quel qu'il soit, est composé de diferens plans posez les uns sur les autres; ou qu'il est fait par le mouvement d'un seul mû d'une certaine maniere. Aussi, selon*

que deux ou plusieurs plans se coupent ou se rencontrent, ils forment des Solides ; ce qui nous oblige en traitant des Solides, de commencer par la rencontre & section des Plans.

Propositions évidentes touchant les Plans.

Proposition I.

1. *Une ligne droite en se mouvant le long d'une autre ligne, qui est droite & immobile, & gardant avec elle une même situation, fait une superficie plane ou un plan.*

Cette superficie a toutes ses parties entre ses extrémitez également posées ; car elles sont faites uniformement : Et ce qui fait sa difference des autres superficies, qui ne sont pas planes ; c'est que selon la maniere dont elle est faite, on lui peut appliquer en tous sens une ligne droite, comme on le va dire.

Proposition II.

2. *Une ligne droite peut être appliquée en tous sens à une surface plane, & convenir avec elle.*

Proposition III.

3. *La surface d'un plan est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les bornes de ce plan.*

Car un plan est composé de lignes droites, qui sont les plus courtes qu'on puisse concevoir entre leurs extrémitez. Mais je ne dis pas que toute surface qui est la plus courte entre ses bornes est un plan ; car entre deux lignes qui sont à quelque distance l'une de l'autre, & qui ne sont pas posées de la même maniere : si on mene des lignes droites, on fera une superficie la plus courte

qui

qui puisse être entre ces deux lignes, mais elle ne sera pas un plan; ainsi quoiqu'il soit vrai que tout plan est une surface la plus courte qu'on conçoive entre ses bornes, néanmoins toute surface la plus courte entre ses bornes n'est pas un plan.

PROPOSITION IV.

Un plan élevé sur un plan est perpendiculaire sur ce plan, lorsqu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre. 4.

PROPOSITION V.

Deux plans sont paralleles, lorsque dans toutes leurs parties ils sont à une égale distance l'un de l'autre, & qu'étant prolongez ils ne se rencontrent point. 5.

PROPOSITION VI.

On peut prolonger un plan, ou le concevoir prolongé de tous côtez, autant qu'il sera necessaire. 6.

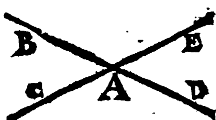
PROPOSITION VII.

Une ligne droite ne peut être en partie sur un plan, & en partie en l'air. Eucl. XI. Prop. 1. 7.

Car pour lors cette ligne ne pourroit être appliquée à ce plan, & convenir avec lui; ainsi selon la seconde Proposition, ce plan ne seroit pas plan. Outre cela on peut concevoir que la partie de cette ligne qui seroit dans le plan étant prolongée demeureroit toûjours dans le plan, ce seroit donc une autre ligne que celle qui seroit en l'air; ces deux lignes néanmoins ayant deux points communs, ne peuvent pas être differentes*.

PROPOSITION VIII. *L. 1. n. 16.

Deux lignes droites qui se coupent peuvent être conçuës dans un même plan. Eucl. XI. Prop. 2. 8.



Les lignes *DB* & *EC* se coupent : ayant mené entre *AB* & *AC* des lignes droites, on aura une superficie, qui est un plan : car on y peut appliquer une ligne droite; & cette superficie est la plus courte qu'on puisse concevoir entre les lignes *AB* & *AC* qui seront sur ce plan ; lequel étant prolongé, si *AD* & *AE*, qui sont parties des lignes *BD* & *EC* ne se trouvent pas dans ce même plan ; *BD* & *CE* seront en partie sur lui, & en partie en l'air : ce qu'on vient de voir être impossible.

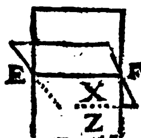
PROPOSITION IX.

9\. *Tout triangle peut être conçû dans un plan.*

C'est une suite de la Proposition précedente.

PROPOSITION X.

10\. *La commune section ou rencontre de deux plans est une ligne droite.* Eucl. XI. Prop. 3.



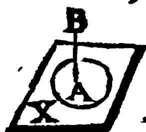
X & *Z* se coupent. Les extrémitez de leur section sont les points *E* & *F*, entre lesquels on a mené une ligne sur *Z* & une sur *X*. Si ces deux lignes n'étoient pas une même ligne : on pourroit mener entre deux mêmes points plus d'une ligne droite ; ce qui est impossible*. La section de ces deux plans ne peut donc être qu'une ligne droite.

* L. 1. n. 15.

PROPOSITION XI.

11\. *Une ligne droite telle que* AB *élevée sur le plan* X, *doit être censée perpendiculaire lorsque de* A *son pié, comme centre ayant fait un cercle*

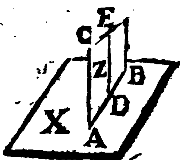
cle, B son sommet est également éloigné de la circonference de ce cercle ; & si cela n'est pas, elle ne peut être dite perpendiculaire.



Cela est conforme à la notion de la ligne perpendiculaire, qui ne panche pas plus d'un côté que d'autre.

PROPOSITION XII. 12

Concevant que AC *une ligne perpendiculaire sur le plan* X, *est mûë d'un mouvement droit & uniforme selon une ligne droite telle que* AB, *elle fera le plan* Z, *qui sera perpendiculaire en toutes ses parties sur le plan* X.



PROPOSITION XIII.

Si la ligne ED *est perpendiculaire sur* AB *section de* Z *& de* X *est perpendiculaire sur* X, *tout le plan* Z *est perpendiculaire sur* X. 13

Car on peut concevoir que le plan Z est fait par le mouvement droit & uniforme de DE sur AB ; ainsi par la Proposition précedente, le plan Z est perpendiculaire sur le plan X.

THEOREME I.

Entre deux lignes paralleles ou non, qui sont dans un même plan ou entre une ligne & un point, on ne peut concevoir qu'un même plan, dans lequel est toute ligne droite menée entre deux lignes. Eucl. XI. Prop. 7. 14

Car si on veut concevoir deux plans, l'un sera plus grand ou plus petit ; ce qui ne peut être ;

* 1 n. 2. puisque * toute superficie qui n'est pas la plus petite entre ses bornes, n'est pas un plan. Ils seront donc égaux ; ce qui étant, ils ne sont pas differens : car si on veut dire qu'ils sont posez l'un sur l'autre, comme ils n'ont point d'épaisseur, ils ne peuvent faire qu'un seul plan.

THEOREME II.

15. *Deux plans qui conviennent en trois points qui ne sont pas sur la même ligne, conviennent entierement.*

1°. Entre deux des points donnez, on ne peut concevoir qu'une ligne droite. 2°. Entre cette ligne droite & le troisiéme point donné, on ne peut concevoir deux differens plans par la proposition précedente : ainsi la partie de ces deux plans entre ces trois points est une même chose; par conséquent si on prolonge cette partie ce ne sera qu'un même plan, ainsi ces deux plans ne seront pas differens.

COROLLAIRE.

16. *La position d'un plan ne dépend donc que de trois points, qui ne soient pas sur une même ligne.*

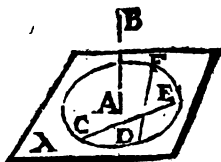
Ou, ce qui est la même chose, *trois points qui ne sont pas sur une même ligne étant donnez, le plan est donné.*

THEOREME III.

17. *Si* B *sommet de la ligne* A B *élevée sur le plan* X *est également éloigné de* C, D, E *trois points également distans de son pié* A, *cette ligne est perpendiculaire sur* X.

1°. Concevons dans le plan *X* un cercle également distant de *B*, qui passe par *C*, *D*, *E* qu'on a supposé en égale distance de *B*,

2°. Concevons un second cercle dont *A* soit le centre, qui passe par les trois points *C*, *D*, *E* aussi également éloignez de *A* par l'hypothése. Ces deux cercles * ne sont qu'un même cercle. Donc * *AB* est perpendiculaire sur X ; ce qu'il falloit prouver. * L. 1. n. 88. * § n. 11.



PROBLEME I.

D'un point donné en l'air comme est B, *abaisser une perpendiculaire sur le point* X. Eucl. XI. Prop. 11. (*même figure.*) 18.

Je tire à discretion deux lignes droites *CE* & *DF*, & appliquant une pointe du compas sur *B*, avec l'autre je prens les points *C*, *D*, *E* également distans ; par lesquels * je fais passer un cercle, au centre duquel je méne de *B* une ligne qui sera perpendiculaire par le Theorême précedent. * L. 1. n. 87.

THEOREME IV.

Si une ligne est perpendiculaire sur le point de la section de deux lignes qui sont sur le plan, elle l'est sur tout ce plan. Eucl. XI. Prop. 4. 19.

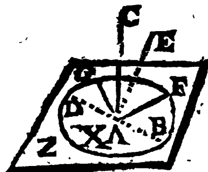
Car ayant pris dans ces deux lignes de part & d'autre du point de section des points également éloignez, le sommet de la perpendiculaire sur ces lignes sera également éloigné de quatre points qui sont sur ce plan * ; partant cette ligne sera perpendiculaire sur tout le plan *. * L. 1. n. 42. * § n. 11.

THEOREME V.

La ligne droite AB, *& toute autre dans le plan* Z *menée par* A *pié de la perpendiculaire* 20.

AC sur ce plan, est perpendiculaire sur AC, ou AC est perpendiculaire sur toutes les lignes droites du plan Z qui passent par A.

De *A* pié de la perpendiculaire *AC*, je décris un cercle *X*, & & je prolonge la ligne *BA* de sorte qu'elle coupe *X* en *D* & *B*. Si *C*, sommet de la perpendiculaire *AC* n'est pas également distant de *D* & de *B*, alors *AC* ne sera pas perpendiculaire sur *AB** ; mais aussi *AC* ne sera pas perpendiculaire sur le plan *Z** ; ce qui est contre l'hypothése. *AB* rencontre donc perpendiculairement *AC* ; ainsi de toute autre ligne du plan *Z*, qui passe par *A*.



*L. 1. n. 40.

*§ n. 12.

Theoreme VI.

21. *Si* AC *une ligne droite rencontre perpendiculairement dans un même point trois autres lignes droites* AB, AF, AG, *ces trois lignes seront en un même plan.* Eucl. XI. Prop. 5. (*même figure.*)

Soient *AB* & *AF* dans le plan *Z*, & que *AG* n'y soit pas, mais sur un autre plan. Concevant un troisiéme plan *Y* qui passe par *AC* & *AG*, & qui étant prolongé coupera *Z* ; cette ligne *AC* sera perpendiculaire sur ce plan *Z** : donc elle le sera aussi sur la ligne de section de *Z* & de *Y**, & par la supposition elle l'est sur *AG* ; ainsi sur *AC* & au même point *A*, il y aura deux perpendiculaires, ce qui ne peut pas être*.

*§ n. 19.
*§ n. 20.
*L. 1. n. 49.

Probleme II.

22. *Sur le point A dans le plan Z, élever une*

perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 12. (*même figure.*)

Il faut de *A* centre faire un cercle ; toute ligne qui descendra d'un point également éloigné de ce cercle, sera la perpendiculaire qu'on demande.

Mais pour trouver mechaniquement ce point. il faut se servir de deux Equerres appliquées par un de leurs côtez, sur deux differentes lignes tracées sur ce plan, & au point de leur section, faisant convenir ensemble l'autre côté desdites Equerres ; ce qui se feroit aussi par le moyen d'une fisselle & d'un plomb, si le plan étoit horizontal ou de niveau ; car pour lors chaque point de la fisselle seroit le point cherché.

THEOREME VII.

On ne peut d'un point sur un plan élever qu'une perpendiculaire. Eucl. XI. Prop. 13. *fig. préced.* 232

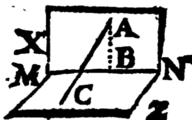
Que cela ne soit, concevons que sur le même point *A*, on éleve les deux lignes *AE* & *AC* qu'on suppose perpendiculaires, & que de *A* comme centre on décrive X un cercle, les points *E* & *C* sommets des deux lignes égales *AE* & *AC* étant differens ne peuvent être également éloignez de la circonference du cercle X ; partant elles ne sont pas toutes deux perpendiculaires sur le plan Z*.

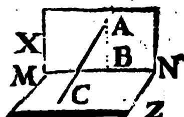
* Th. 6.

THEOREME VIII.

D'un point hors d'un plan on ne peut mener qu'une perpendiculaire sur ce plan. 241

Soit *A* le point donné au dessus d'un plan d'où on suppose qu'on a mené deux perpendiculaires, sçavoir *AB* & *AC* ; je joins leurs





piés *B* & *C* par la ligne *BC*. Ces trois points, *A*, *B*. *C* font le triangle *ABC* qui se peut concevoir dans un mê-
* 3 n. 9. me plan *. Les angles *A C* & *ACB* que font les perpendiculaires *A*B & *AC*, sont droits. Donc *ABC* auroit plus de deux angles
*L. 1. n. 79. droits; ce qui ne peut être *.

COROLLAIRE.

25. *Si le plan X est perpendiculaire sur le plan Z; & que de A point dans le plan X on abaisse une perpendiculaire sur Z, cette ligne tombera sur* MN *section de* X *&* de Z. Eucl. XI. Prop. 38. (*Même figure.*)

Que cela ne soit, & qu'une perpendiculaire tombe de *A* sur *C* hors de la ligne *MN*; j'abaisse *AB* perpendiculairement sur *MN*; ainsi comme *B* est dans la section de *X* & de *Z*, il y a sur *Z* deux perpendiculaires *AB* & *AC* menées d'un même point *A*; ce qu'on vient de voir être impossible.

THEOREME IX.

26. *La ligne perpendiculaire est la plus courte qu'on puisse mener d'un point hors d'un plan sur ce plan.* (Figure ci dessus.)

Le point donné est *A*, la ligne *AB* est perpendiculaire, *AC* ne l'est pas. Il faut prouver que *AB*, est plus courte que *AC*. Pour cela je joins *C* & *B* par une ligne droite. Le triangle
* 3 n. 9. *ABC* se peut concevoir dans un même plan *. Or *AB* perpendiculaire sur *BC*, est plus courte que
* L. 1. n. 53. l'oblique *AC* *; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

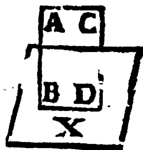
27. *Donc la mesure de la distance d'un point hors*

d'un plan, à ce plan, doit être une perpendiculaire.

Puisque cette perpendiculaire est la ligne la plus courte, & qu'on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire.

THEOREME X.

Deux lignes étant perpendiculaires sur un même plan, on les peut concevoir dans un même plan. 28.



Concevons qu'on a mené par le pié des deux lignes *AB* & *CD* perpendiculaires sur X, une troisiéme ligne *BD*, sur laquelle concevons que *AB* ou *CD* se meuve uniformément & toûjours perpendiculairement, elles feront un plan* ; ce qu'il falloit démontrer. * § n. 1.

THEOREME XI.

AB & CD (même figure) *perpendiculaires sur le plan* X *sont paralleles ; & si de deux paralleles l'une est perpendiculaire sur le plan* X, *l'autre le sera.* Eucl. XI. Prop. 6. & 8. 29.

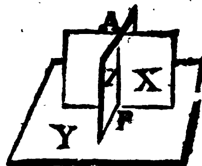
1°. Soit menée la ligne *BD* par le pié de *AB* & de *CD*, lesquelles lignes* sont perpendiculaires sur *BD* : donc ces trois lignes *AB*, *CD*, *BD* pouvent être dans un même plan*. Ainsi *AB* & *CD* étant perpendiculaires sur *BD*, elles sont paralleles*. * § n. 20. * § n. 28. * L. 1. n. 68.

2°. Si *AB* & *CD* sont paralleles, & que *AB* soit perpendiculaire ; je dis que *CD* le sera aussi, car ayant mené *BD*, la ligne *AB* sera perpendiculaire sur *ED** : donc *CD* parallele à *AB*, est aussi perpendiculaire sur *BD** ; ce qu'il falloit prouver. * § n. 10. * L. 1. n. 89.

THEOREME XII.

30. *La section* AB *de deux plans* Z *&* X, *qui sont perpendiculaires sur* Y, *est une perpendiculaire sur le même plan.* Eucl. XI. Prop. 19.

* § n. 10. 1°. Cette section est une ligne droite *, & puisque les plans *Z* & *X* sont perpendiculaires sur *Y*, la ligne *AP* en tant qu'elle est considerée en *Z* ne peut être conçuë penchante de part & d'autre de *Z* : Et par la même raison, entant qu'elle est considerée en *X*, on ne peut pas concevoir qu'elle panche de côté ou d'autre de ce plan ; partant on peut concevoir pour le moins trois points dans le plan *Y* également éloignez de *P*, qui seront aussi également éloignez de *A* ; ainsi *AP* est perpendiculaire sur le plan *Y* *.



* § n. 17.

THEOREME XIII.

31. *La section de* X *& de* Z *étant perpendiculaire sur* Y, *ces deux plans & quelqu'autre que ce soit dont* AP *sera la section, seront perpendiculaires sur* Y. Eucl. XI. Prop. 18. (*même fig.*)

Car tous ces plans peuvent être conçûs faits par le mouvement de *AP* *.

* § n. 12.

THEOREME XIV.

32. *Si trois points dans un même plan, & non sur une même ligne, sont également distans d'un second plan, ces deux plans sont paralleles.*

La position d'un plan ne dépend que de trois points * ; par consequent si trois points d'un plan sont également distans d'un second plan, c

* § n. 14.

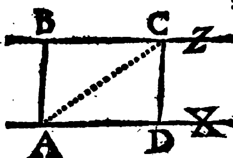
deux plans sont également distans dans tous leurs autres ; ainsi ils sont parallèles.

THEOREME XV.

Les plans X *&* Z *étant paralleles, si la ligne* AB *est perpendiculaire sur* X, *elle le sera aussi sur* Z. *Et si* AB *est perpendiculaire sur* X *& sur* Z, *ces deux plans sont paralleles.* Eucl. XI. Prop. 14. 33.

Si on prétend que *AB* perpendiculaire sur *X* ne l'est pas sur *Z*, concevons qu'on ait élevé au point *A* vers *Z* une ligne perpendiculaire telle que *AC*, elle sera plus courte que *AB* *. De *C* je conçois une perpendiculaire sur *X*, qui sera encore plus courte que *AC*, partant plus que *AB* ; ainsi le point *D* s'approchera plus de *Z* que *A* ; ainsi *X* & *Z* n'étant pas en égale distance, ils ne sont pas paralleles ; ce qui est contre l'hypothése. Une ligne donc qui est perpendiculaire sur l'un de ces plans, l'est aussi sur l'autre. Le reste est aisé.

* L. 1. n. 53.

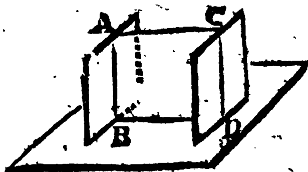


THEOREME XVI.

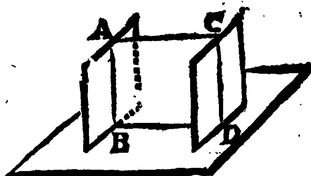
Les sections AB *&* CD *de deux plans paralleles coupez par un troisiéme plan, sont des lignes paralleles.* Eucl. XI. Prop. 16. 34.

Ces sections *AB* & *CD* sont des lignes droites *, lesquelles sont dans le troisiéme plan, où étant prolon-

* 5. n. 16.



gées, elles se rencontreroient si elles n'étoient pas paralleles ; par conséquent les deux autres plans où elles sont étant prolongez, se rencontreroient aussi, ainsi ils ne seroient pas paralleles, contre la supposition. On ne peut donc pas dire que *AB* & *CD* ne sont pas paralleles.

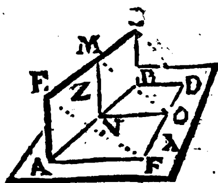


THEOREME XVII.

35. *Les lignes droites paralleles à une même, quoique sur differens plans, sont paralleles entr'elles.* Eucl. XI. Prop. 9.

Soit *CE* parallele à *AB*, à laquelle *DF* dans un autre plan est aussi parallele ; je dis que *CE* & *DF* sont paralleles entr'elles.

Du point *B* j'éleve sur *AB* perpendiculairement *BC* & *BD*, coupant *CE*, *DF* aux points *C* & *D*. On peut concevoir un plan par les
* 3 n. 9. trois points *BCD* * ; *AB* perpendiculaire, tant sur *BD*, que sur *BC*, sera perpendiculaire, sur ce
* 5 n. 19. plan * ; mais *CE* & *DF* étant posées paralleles à *AB* seront aussi perpendiculaires sur ledit
* 5 n. 29. plan & paralleles entr'elles * ; ce qu'il falloit prouver.



THEOREME XVIII.

36. *Toutes lignes paralleles dans le plan X, rencontrant d'autres lignes aussi paralleles dans le*

plan Z, font entr'elles les angles égaux. Euclid. XI. Prop. 10 (*Même figure.*)

BD & *NO* sont parallelles entr'elles sur le plan *X*; & *BC*, & *MN* sur le plan *Z*: il faut prouver que l'angle *CBD* est égal à *MNO*. Pour cela je mene *DF* & *CE* paralleles à *AB*. Puisque les paralleles entre paralleles sont égales, car elles font les mêmes angles* par consequent égales*; puisque, dis-je, *CE* est parallele à *DF* par le Theorême précedent: partant *BD* = *NO* & *BC* = *NM* & *CD* = *MO*; donc les triangles *CBD* & *MNO* sont égaux & semblables; ainsi l'angle *CBD* est égal à *MNO*; ce qu'il falloit démontrer.

*L. 2. n. 27.

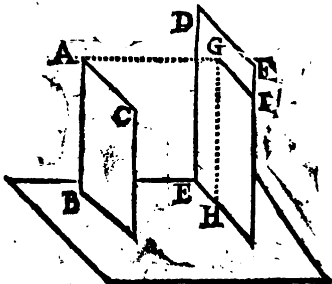
*L. 2. n. 110.

THEOREME XIX. 37.

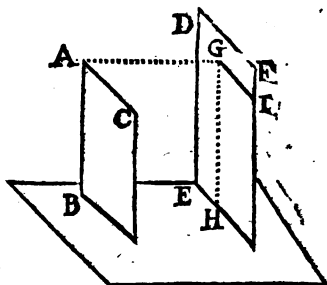
Deux lignes AB *&* AC *qui se rencontrent au point* A, *& sont paralleles à deux autres lignes* ED *&* DF *qui se rencontrent en* D, *si elles ne sont point sur un même plan, les plans* BC *&* EF, *sont paralleles.* Eucl. XI. Prop. 15.

De *A* soit menée une perpendiculaire sur le plan *EF* qu'elle rencontre au point *G*, duquel je mene *GH* parallele à *DE*, & *GI* parallele à *DF*: donc par le Theorême 17*, *AB* & *GH* sont paralleles; comme aussi *AC* & *GI*: ainsi *AG* étant perpendiculaire sur *GI* & sur *GH* par

*S. n. 35.



* L. 1. n. la construction, le sera aussi sur *AC* & sur *AB**;
69. & partant sur le plan *BAC** : ainsi il faut que
* § n. 19. ces deux plans soient paralleles; car s'ils ne l'étoient pas ils se rencontreroient étant prolongez en quelque point, d'où aux points *A* & *G*, on pourroit mener des lignes droites qui

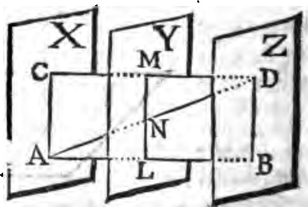


ne seroient donc pas paralleles contre ce qui a été démontré, puisque *AG* étant perpendiculaire sur lesdits plans, le doit être sur toutes les lignes
* § n. 20. tirées sur eux par les points *A* & *G**; ce qui ne seroit pas, si ces lignes concouroient.

THEOREME XX.

38. *Deux lignes droites coupées par des plans paralleles, sont coupées proportionellement.* Eucl. XI. Prop. 17.

Soient deux lignes droites *AB*, *CD* coupées par trois plans paralleles *X*, *Y*, *Z*, aux points *A*, *L*, *B*, *D*, *M*, *C*; je dis qu'elles sont coupées proportionnellement, c'est-à-dire *AL*. *LB* : : *CM*. *MD*.



Car sur cha-

que plan des extrémitez *X* & *Z*, soient joints les points de section par les droites *AC* & *BD*, & tirée la diagonale *AD* rencontrant le plan *Y* au point *N*, duquel on tirera par les points de section *L* & *M* les lignes *LN* & *MN*. Le triangle ABD pourra être conçu dans un plan*, comme aussi celui *ADC* dans un autre, si ce n'est pas le même. Chacun des plans de ces triangles étant coupé par des plans paralleles les lignes de section seront paralleles*, & ces triangles seront ainsi coupez paralelement à leurs bases, & partant *AL. LB* :: *AN. ND* :: *CM. MD**, & consequemment *AL. LB* :: *CM. MD**; ce qu'il falloit prouver. La même chose seroit, s'il y avoit plus de trois plans & plus de lignes.

* § n. 9.
* § n. 134.
* L. 4. n. 16.
* L. 3. n. 53.

SECTION II.

De la composition des Solides selon leurs surfaces, & selon leur solidité.

Definition I.

Lorsque trois ou plusieurs angles plans, qui sont sur differens plans, ou qui n'ont pas une même base se rencontrent dans leur sommet, l'angle qu'ils comprennent se nomme Solide. 399

Deux seuls angles plans ne peuvent renfermer un angle solide; ainsi pour le faire, il faut tout au moins trois angles plans, qui se coupent ou se rencontrent en aboutissant à un point, comme un diamant bien taillé.

Definition II.

Les solides compris entre des surfaces droites, ou plans paralleles, se nomment Parallelipipedes. 400

DEFINITION III.

41\. *Les solides qui sont compris entre des plans tous égaux & semblables, sont nommez* Poliedres. *On les nomme Reguliers, lorsque les figures qui les comprennent sont regulieres, & que tous les angles sont égaux.*

DEFINITION IV.

42\. *Le nombre des faces planes d'un solide regulier, lui donnent un nom particulier.*

1°. *Il s'appelle* Tetraëdre, *lorsqu'il est compris sous quatre triangles équilateraux & égaux.*

2°. Exaëdre, *quand il est compris sous six quarrez égaux; c'est le cube fait comme un dé à joüer.*

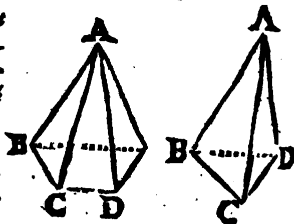
3°. Octaëdre, *lorsqu'il est compris sous huit triangles égaux & équilateraux.*

4°. Dodecaëdre, *lorsqu'il est compris sous douze pentagone égaux & équilateraux.*

5°. Icosaëdre, *lorsqu'il est composé de 20 triangles équilateraux & égaux.*

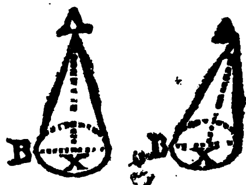
DEFINITION V.

43\. *Une ligne, dont le sommet est immobile, parcourant par le pié une figure;*



1°. *Si cette figure est un polygone, cette ligne décrira un solide, qu'on nomme* Pyramide, *tel que* ABCD;

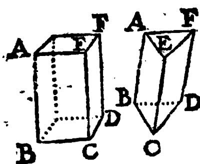
2°. Si cette figure que parcourt le pié de la ligne est un cercle, le solide est un Cône *tels que* X.

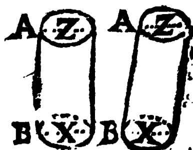


Dans ces figures la ligne du sommet au centre de la base, s'appelle l'Axe du Solide, qui se nomme Droit ou oblique, si cette ligne fait un angle droit ou oblique sur sa base.

3°. *Si le sommet de la ligne, qui décrit le solide, n'est pas immobile, & que dans le temps que son pié parcourt la base, son sommet parcourt une figure égale, semblable, & semblablement posée telle qu'*ABCDEF; *ce sera un* Prime.

4°. *Si la base est un cercle, ce sera un* cylindre; *tel que* ABXZ.





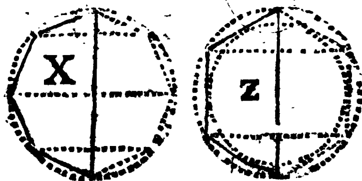
DÉFINITION VI.

44.

Si un cercle tourne autour de son diametre, il décrit une Sphere, *dont ce diametre s'appelle l'*Axe, *le centre du cercle, dont la révolution a fait la Sphere, est* le centre *de la Sphere. Les lignes tirées de ce centre à la circonference en sont* les rayons, *celles qui passent par le centre, & se terminent à la circonference, sont les* diametres.

DEFINITION VII.

45. *Un polygone regulier en tournant sur une ligne droite qui passe par son centre, décrit ce qu'on appelle un* Sphéroïde, *c'est-à-dire, une espece de Sphere, tel qu'est* X *&* Z.



DEFINITION VIII.

46. *Un solide* A *est dit* Circonscrit *à un autre solide* B *qu'il contient, s'il est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent renfermer* B; *ou bien, si* B *est le plus grand de tous les solides semblables que* A *peut renfermer.*

DE'FINITION IX.

47. *Un solide* B *est dit* Inscrit *dans un autre solide* A *où il est renfermé, s'il est le plus grand de tous les solides semblables qui puissent être renfermez dans* A; *ou ce qui est la même chose, si* A *est le plus petit de tous les solides semblables qui puissent le renfermer.*

DEFINITION X.

48. *Corps regulier est celui qui est compris entre des figures semblables, regulieres & égales, duquel aussi tous les angles solides sont égaux.*

On démontrera dans la suite, qu'il n'y a que cinq corps reguliers.

THEOREME I.

49. *Si un angle solide est compris de trois angles plans, deux de ces angles plans pris ensemble comme on voudra, sont plus grands que le troisiéme.* Eucl. XI. Prop. 20.

Les trois angles plans *BAD*, *BAC*, *CAD* font un angle solide, il faut prouver que deux de ces angles plans pris ensemble sont plus grands que le troisiéme; que par exemple *BAD* < *BAC* + *CAD*. Entre les lignes *AB* & *AD*, aucun plan n'est plus petit que *BAD* *; partant le plan droit *BAD* est plus petit que le plan creux *ABCD*. On démontrera de la même maniere, que l'angle plan *BAC* est plus petit que *BAD* avec *CAD*. * 5 n. 3.



COROLLAIRE.

50. *Les côtez des trois angles plans, qui font un angle solide, ayant été pris égaux, les bases de ces trois angles plans, font un triangle.* Eucl. XI. Prop. 22. (*Même figure.*)

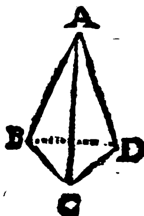
Soient faits égaux les trois lignes *AB*, *AC*, *AD* côtez des trois angles plans, qui font l'angle solide *A*; il faut démontrer que les trois lignes *BC*, *CD*, *DB*, bases des trois angles plans *BAC*, *CAD*, *DAB* font un triangle. Pour cela * il suffit que deux de ces lignes prises ensemble, soient plus grandes que la troisiéme. Or cela est ainsi, car ces deux angles dont ces lignes sont les bases, seront plus grands que l'angle qui est sur la troisiéme; & par consequent cette troisiéme ligne est plus petite *. * L. 2. n. 67. * L. 2. n. 104.

THEOREME II.

51. *Tous les angles plans qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits.* Eucl. XI. Prop. 21.

1°. Commençons par l'angle solide *A*, com-

posé de trois plans, par le Theorême précedent les angles *BCA* + *DCA* sont plus grands que l'angle *BCD*, & de même *ADC* + *ADB* plus grands que *CDB*; comme aussi *ABD* + *ABC* plus grands que *DBC*. Ainsi les six angles des bases des trois triangles qui forment l'angle solide *A*, sont plus grands que les trois triangles du triangle *BCD*, c'est-à-dire, plus grands que deux droits *. Or tous les angles des trois triangles qui forment ledit angle solide *A*, sont ensemble égaux à six droits *. Si donc de cette somme on ôte plus que deux droits, valeur des six angles sur la base, il restera moins de quatre droits pour la valeur de l'angle solide *A*; ce qu'il falloit prouver.

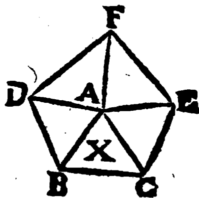


* L. 2. n. 75.

* Idem.

2°. Par la même methode on montrera que les angles solides formez par quatre plans, sont aussi moindre que quatre droits.

3°. Si *X* est un triangle solide compris par cinq triangles, dont le sommet doit être conçu en l'air, on prouvera aussi que l'angle *DBC* est plus petit que les deux angles *DBA* & *CBA*, par le Theoreme précedent, & l'angle *BCE* est plus petit que les angles *ACB* & *ACE* pris ensemble, de même des autres. Mais aussi tous les angles du polygone *BCEFD*, base de l'angle solide, sont égaux à six angles droits *; ainsi tous les angles de la base des cinq triangles qui font l'angle solide *X* sont plus grands que six droits, puisqu'ils sont plus grands



* L. 2. n. 123.

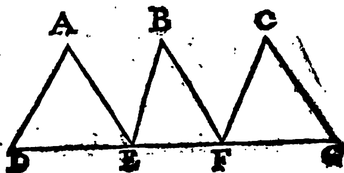
que les angles du polygone, comme on vient de voir. Tous les angles de ces cinq triangles qui font l'angle solide valent dix droits; donc puisque ceux de leurs bases valent plus de six droits, ceux des sommets valent moins que quatre droits, ce qu'il falloit démontrer.

On peut démontrer ce Theorême en cette maniere. Concevons, 1°. que A est un point dans un plan, & le sommet de plusieurs triangles dont les côtez de X sont les bases. Tous ces angles autour de A ne valent que quatre angles droits, 2°. Si on leve le point A, alors les angles du sommet de ces triangles deviendront plus petits, ayant mêmes bases & les côtez plus grands; * L. 2. n. 99. *ce qui étant, tous ces angles vaudront moins que quatre angles droits.*

PROBLEME I.

52. *Ayant trois triangles plans, dont deux pris ensemble sont plus grands que le troisiéme, mais qui tous ensemble sont moindre que quatre angles droits, faire un angle solide.* Euclid. XI. Prop. 23.

Soient ces trois triangles plans *A*, *B*, *C*, il n'y a qu'à les joindre en un même point de maniere, que les côtez qui les renferment conviennent



ensemble, c'est-à-dire, que *AE* s'unisse avec *BE*, *BF*, avec *CF*, & *CG* avec *AD*, cela formera l'angle solide demandé, suivant la Définion*. * 1. n. 39.

PROBLEME II.

53. *Sur une ligne droite donnée, & à un point*

donné en cette ligne, faire un angle solide égal à un angle solide donné. Eucl. XI. Prop. 26.

Soit une ligne donnée *AD* & *A* un point dans cette ligne, il faut faire au point *A* un angle solide donné. Soient les trois plans de cet angle donné *DAE*, *EBF*, *FCG* ayant fait trois autres plans égaux, & les joignant au point *A* en la maniere qu'il vient d'être expliqué au précedent Problême; il est évident qu'ils feront l'angle solide requis.

Theoreme III.

54. *S'il y a deux angles plans égaux, aux sommets desquels on leve en l'air deux lignes droites, faisant angles égaux avec les lignes des angles premierement posez chacun au sien: & d'un point pris au haut de chacune de ces deux lignes élevées, sont menées des lignes perpendiculaires aux plans où sont les angles premierement posez, & des points où tombent ces perpendiculaires, sont tirées des lignes droites vers les sommets des angles premierement posez: les angles que font ces lignes avec les levées en l'air, sont égaux entr'eux.* Eucl. XI. Prop. 35.

Euclide fait cette Proposition, pour démontrer d'autres Propositions dans la suite de ses Elemens. Je n'en ai pas besoin; ainsi je la passe.

Theoreme IV.

Il ne peut y avoir plus de cinq differens corps reguliers.

55. C'est-à-dire, cinq differens solides compris sous des figures planes regulieres toutes égales & semblables, & dont tous les angles soient égaux. Dans une Sphere, tout est égal; mais il s'agit

d'un solide compris sous des plans. On a prouvé que tous les angles plans, qui comprennent un angle solide, valent moins que quatre angles droits. Voyons quelles sont les figures planes, semblables, regulieres, égales, qui puissent faire un angle solide.

1°. Trois triangles égaux & équilateraux peuvent faire un angle solide, car les trois angles de ces triangles qui comprendront un angle solide, ne valent que trois fois soixante degrez, chacun des angles d'un équilateral étant de soixante. Trois de ses triangles joints ensemble en pourront donc faire un, tel que sont ceux du Tetraëdre.

2°. Quatre de ces triangles peuvent encore faire un angle solide; car les quatre angles qu'ils comprendront ne valent que quatre fois soixante; ce qui est moins que quatre droits. L'Octaëdre est fait de quatre de ces triangles.

3°. Cinq de ces triangles peuvent encore faire un angle solide, car les angles des plans qu'ils comprennent, ne valent que cinq fois soixante degrez; ce qui est moins que quatre angles droits. L'angle de l'Icosaëdre est fait par cinq de ces triangles.

Six triangles équilateraux ne peuvent faire un angle solide; car les six angles plans qu'ils comprennent, valent quatre angles droits: six fois soixante faisant trois cens soixante valeur de quatre angles droits; ainsi ces six triangles seroient un angle plan, & non un angle solide *. * 32. 1. E.

4°. Trois angles d'un quarré peuvent faire un angle solide; car ils valent moins que quatre angles droits. L'angle du cube est composé de trois angles du quarré. On ne peut concevoir

d'autre solide fait de quarrez : car quatre ne peuvent faire un angle solide ; à plus forte raison, ni cinq, ni six.

5°. Trois pentagones peuvent faire un angle solide ; car leurs angles ne font que 324 degrez, ce qui est moins que quatre angles droits. Chaque angle du Dodecaëdre est fait de trois pentagones. Plus de trois pentagones ne peuvent faire un angle solide ; car quatre font 432, ce qui passe la valeur de quatre angle droits.

Trois exagones ne peuvent faire un angle solide ; car chacun étant de 120 degrez, les trois font 360, qui valent quatre droits : ainsi ils ne peuvent pas faire un angle solide*. Plus est grand le nombre des côtez d'un polygone, l'angle de la figure est plus grand ; ainsi si trois exagones ne peuvent faire un angle solide, à plus forte raison trois heptagones ne le peuvent pas ; ainsi il n'y a que le triangle équilateral, le quarré & le pentagone, qui le puissent ; mais on peut faire un angle solide de trois équilateraux, de quatre & de cinq ; il ne peut donc y avoir que cinq differens corps reguliers.

*n. 51.

PROPOSITIONS EVIDENTES.

PROPOSITION I.

56. *Une figure est plus grande que celle autour de laquelle elle est circonscrite, & plus petite que celle dans laquelle elle est inscrite.*

PROPOSITION II.

57. *De deux Prismes de mêmes hauteur, celui dont la base est moindre, & qui par consequent peut être comprise en celle de l'autre, est plus petit.*

Car il est évident qu'il y est contenu. Or ce qui

qui contient, est plus grand, que ce qui est contenu.

PROPOSITION III.

De deux Prismes circonscrits à un cilindre, celui-là approche plus du cilindre qui a plus de côtez. 58

La base du cilindre proposé est X ; celle du prisme qui a moins de côtez, & qui est circonscrit au cilindre soit nommé Y, & Z celle d'un autre prisme qui a plus de cotez, & qui est circonscrit au même cilindre. Le polygone Z* est plus petit que le polygone Y : les prismes dont ces polygones sont les bases, sont de même hauteur, étant circonscrits à un même cilindre, donc* celui qui sera sur Z, & qui a ainsi plus de côtez, est plus petit que celui qui en a moins, & dont Y est la base ; ainsi il approche plus du cilindre ; ce qu'il falloit démontrer.

*L. 2. n. 149.

* 8. n. 57.



PROPOSITION IV.

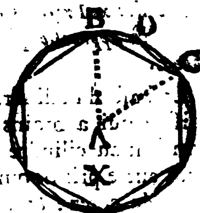
Donc un prisme d'une infinité de côtez approche si près du cilindre, qu'il n'y a point de difference : ainsi on peut supposer que le cilindre est un prisme d'une infinité de côtez. 59

PROPOSITION V.

De deux prismes inscrits dans un cilindre, celui-là approche plus du cilindre qui a plus de côtez. 60

La base du cilindre proposé est X, les deux

polygones Z & Y inscrits dans ce cercle soient les bases de deux prismes inscrits dans ce cilindre dont X est la base.



60. Le polygone Y qui a plus de côtez est plus grand, & approche plus du cercle que le polygone Z*. Ces deux prismes, dont Z & Y sont les bases, sont de même hauteur, étant inscrits dans un même cilindre; donc le prisme qui est sur Y est plus grand, que celui qui est sur Z*. Ainsi il approche plus du cilindre; ce qu'il falloit démontrer.

*L. 2. n. 151.

*S. n. 56.

PROPOSITION VI.

61. *De deux pyramides de même hauteur, celle qui a une grande base est la plus grande.*

Car il est évident que si l'on conçoit que l'une soit mise dans l'autre, celle qui a une plus grande base contiendra celle qui en a une plus petite.

PROPOSITION VII.

62. *De deux pyramides circonscrites à un cône, celle qui a plus de côtez approche plus du cône.*

PROPOSITION VIII.

63. *De deux pyramides inscrites dans un cône, celle qui a plus de côtez approche plus du cône.*

PROPOSITION IX.

64. *Donc on peut supposer qu'un cône est une pyramide d'une infinité de côtez.*

PROPOSITION X.

65. *Plus un polygone a de côtez, le spheroïde qu'il*

forme approche plus de la sphere autour de laquelle il est circonscrit.

Car plus le polygone, qu'on peut appeller le Generateur du spheroïde, aura de côtez, plus il approchera du cercle; ainsi le spheroïde qu'il décrira par sa revolution approchera plus de la sphere à laquelle il est circonscrit; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XI.

Donc une sphere peut être prise pour un spheroïde formé par un polygone d'une infinité de côtez. 66.

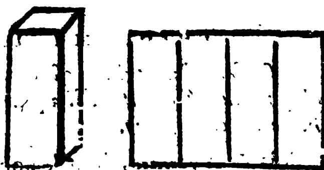
SECTION III.

De la surface des Solides.

THEOREME I.

La surface d'un prisme droit est égale à un parallelogramme qui est de même hauteur que ce prisme, & dont la base est égale au circuit de ce prisme. 67.

Les surfaces d'un prisme droit sont des parallelogrammes tous de même hauteur, dont les bases prises ensemble font le circuit de ce prisme : ils



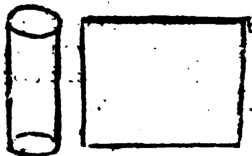
sont donc égaux à un parallelogramme de la hauteur du prisme, & dont la base est égale à

son circuit ; ce qui est évident.

On n'y comprend point les surfaces des bases.

COROLLAIRE I.

68. *Donc puisqu'un cilindre droit peut être*
* *§ n. 55.* *pris pour un prisme* , d'une infinité de côtez, sa surface est égale à un parallelogramme de même hauteur, dont la base est égale à la circonference du cercle, qui est la base du cilindre.*



COROLLAIRE II.

69. *Donc tout ce qui a été démontré de la raison qu'ont les parallelogrammes entr'eux, convient aux surfaces des cilindres.*

1°. Les surfaces de deux cilindres sont l'une à l'autre en raison composée de leur hauteur, & du circuit de leur base.

2°. Dans deux cilindres, si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, c'est-à-dire, si la raison de leurs surfaces est composée de deux
* *L. 4. n.* raisons égales, cette raison est doublée*.
71. 3°. Si deux cilindres ont leurs hauteurs ou leurs bases égales, leurs surfaces sont entr'elles
* *L. 4. n.* comme les inégales*.
75.

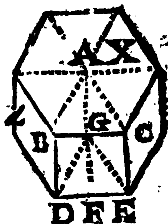
THEOREME II.

70. *La surface d'un prisme est double de celle du polygone qui est sa base, s'il a pour hauteur l'apothéme de ce polygone.*

Soit Z un prisme, dont le polygone X est sa base. L'apothéme de X est *AG*, c'est-à-dire, une perpendiculaire tirée de son centre *A* sur BC un de ses côtez ; il faut démontrer que si

FG, hauteur de *Z* est égale à *A*G apothême de de X, la surface de *Z* sera double de X.

Ayant mené de tous les angles du polygone *X* des lignes au centre *A*, on fait autant de triangles que *Z* a de faces, lesquelles faces sont des parallelogrammes. Or ces paralelogrammes, comme est *BCED*, & ces triangles comme est *ABC*, ont même hauteur & même



base : donc ces parallelogrammes sont doubles de ces triangles *, & par consequent la surface de *Z* composée de ce parallelogramme est double de celle de *X*, égale à tous ces triangles. * *L. 4. n.* 133.

COROLLAIRE I.

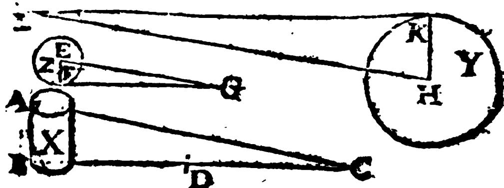
71. *Donc si la hauteur d'un cilindre qu'on peut regarder comme un prisme est égale au rayon du cercle qui est sa base, sa surface sera double de celle du cercle.*

COROLLAIRE II.

72. *Ainsi si un cilindre a pour sa hauteur deux fois le rayon, ou une fois le diametre du cercle qui est la base, sa surface sera quatre fois plus grande que celle de ce cercle.*

THEOREME III.

73. *La surface du contour d'un cilindre est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre la hauteur de ce cilindre & le diametre du cercle qui est la base.* Archimede I. Prop. 16.



X est un cilindre, dont *AB* est la hauteur; *BD* le circuit de sa base, qui est le cercle *Z*, dont le circuit est *FG* ou *BD*, & *BC* le double de ce circuit. La surface de *X* est égale au parallelogramme *ABD* ou au triangle *ABC*, comme celle du cercle *Z* au triangle *EFG* *. Je suppose que *HK* rayon du cercle *Y*, est moyen proportionnel entre la hauteur de *X*, & 2*EF* diametre de *Z*.

*L. 2. n. 154.

Soit *KL* le circuit de *Y*, ainsi sa surface est égale au triangle *HKL* : il n'est donc question que de prouver que le triangle *HKL* est égal au triangle *ABC* : car dans tous les cercles il y a une même raison entre le rayon & la circonference.

Par l'hypothese ∺ *AB. HK.* 2*EF.* Or *HK. KL* :: 2*EF.* 2*FG* ou *BC*; & *alternando HK.* 2*EF* :: *KL. BC* : donc puisque *AB. HK* :: *HK.* 2*EF* :: *KL. BC.* Ainsi *AB. HK* :: *KL. BC* *, partant *AB* × *BC* = *HK* × *KL* *. Or les triangles *ABC* & *HKL* sont les moitiez de ces rectangles; ils sont donc égaux; ce qu'il falloit prouver.

*L. 3. n. 53.
* L. 3. n. 56.

THEOREME IV.

74. *La surface d'une pyramide est egale à un triangle, dont la hauteur est égale à la hauteur de chacune de ses faces, & dont la base est*

égale au circuit de la base de cette pyramide, ou à un parallelogramme de même hauteur, dont la base est la moitié plus petite. Archimede I. Prop. 10. & 11.

Chacune des faces de la pyramide est un triangle, ces faces étant égales, ces triangles sont égaux entr'eux, & à un triangle rectangle de même hauteur, & dont la base est égale à toutes les bases prises ensemble de ces triangles *. Or ce triangle est égal à un parallelogramme de même hauteur, dont la base est moitié plus petite *, qui est ce qu'il falloit prouver. * L. 1. n. 143. * L. 2. n. 133.

COROLLAIRE I.

Donc puisque les cônes peuvent être considerez comme des pyramides, la surface d'un cône est égale à un triangle rectangle de même hauteur que le côté du cône, & dont la base est égale au circuit de la base du cône, ou à un parallelogramme rectangle de même hauteur, dont la base est égale à la moitié de sa base. 75.

La hauteur de la surface du cône & de la pyramide est une ligne droite la plus courte qu'on puisse concevoir, menée sur la surface depuis le sommet jusqu'à sa base.

COROLLAIRE II.

Tout ce qui a donc été démontré des raisons & des proportions entre plusieurs rectangles semblables, convient aux surfaces des cônes. 76.

1°. Les surfaces des cônes sont entr'elles en raison composée de leur hauteur & de leur base.

2°. Si la hauteur est à la hauteur comme la base à la base, ces surfaces seront en raison doublée.

3°. Si les deux cônes ont leur hauteur ou leur base égale, leurs surfaces seront entr'elles comme les inégales.

4°. Donc puisque les circonferences des cercles sont entr'elles comme leurs diametres, deux cônes ayant même hauteur, leurs surfaces sont entr'elles comme les diametres de leurs bases.

5°. Un rectangle étant donné, on en peut trouver un ou plusieurs semblables qui ayent une telle raison avec lui; aussi un cône étant donné, on peut trouver un ou plusieurs autres cônes aussi semblables, qui soient avec le donné en raison requise.

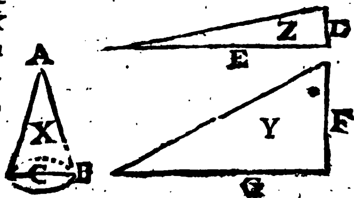
Theoreme V.

177. *La surface du cône* X *est à celle du cercle* BCD, *qui est sa base, comme* AB *hauteur de sa surface est au rayon de cercle.* Archimede I. Prop. 18.

La surface de ce cercle est égale au triangle rectangle *Z* dont le côté *D* est égal au rayon *BC*, & le côté *E* au circuit du cercle*.

* L. 2. n. 154.

La surface du cône *X* est égale au triangle rectangle *Y*, dont le côté *F* est égal à *AB*, & le côté *G* au circuit de sa base*.



* 5. n. 75.

G & *E* étant égaux chacun au circuit du cercle, qui est la base du cône, ils sont égaux entr'eux; partant les surfaces de ces deux triangles rectangles *Y* & *Z*, qui ont des bases égales, sça-

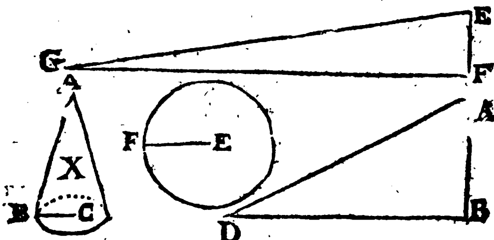
voir G & E, sont entr'elles comme F à D*; mais AB = F, & BC = D: donc X surface du cône, est à celle du cercle de sa base comme AB hauteur de sa surface est à BC rayon du cercle de sa base; ce qu'il falloit prouver.

*L. 4. n. 71.

THEOREME VI.

La surface d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre la hauteur du cône, & le rayon de la base de ce cône, est égal à la surface de ce cône. Archimede I. Prop. 17. 78.

Soit X un cône dont AB est la hauteur de sa surface & BD le circuit qui est sa base, ainsi sa surface est égale au triangle rectangle ABD. La ligne BC est le rayon de sa base. Je suppose que EF est moyen proportionnel entre AB & BC, & que EF est le rayon d'un cercle dont FG est le circuit, ainsi la surface de ce cercle est égale au triangle EFG, par consequent il n'est question que de prouver que ABD = EFG.



Par l'hypothese AB. EF :: EF. BC: & puisque les circonferences des cercles sont entre elles comme leurs diametres EF. BC :: FG. BD. Ainsi AB. EF :: EF. BC :: FG. BD. Donc AB. EF :: FG. BD; partant AB × BD = EF × FG*. Or ABD est moitié de AB × BD*,

*L. 3. n. 56.

*L. 2. n. 133.

comme aussi EFG est moitié de $EF \times FG$. Ces triangles sont donc égaux ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME VII.

79. * *Si la hauteur & la base d'un prisme sont égales à la hauteur & à la base d'un pyramide droite, la surface du prisme sera double de celle de la pyramide.*

Chaque face du prisme est un parallelogramme, & chaque face de la pyramide est un triangle. Dans le cas proposé ces parallelogrammes & ces triangles sont de même hauteur, & sur même base : donc * ces parallelogrammes sont doubles de ces triangles ; ainsi la surface du prisme est double de celle de la pyramide ; ce qu'il falloit prouver.

* L. 2. n. 133.

COROLLAIRE.

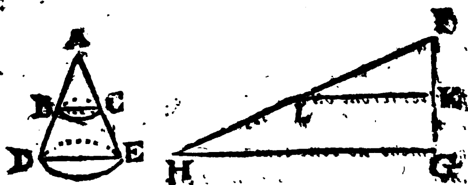
80. *Donc les cônes pouvant être considerez comme des pyramides, & les cilindres comme des prismes, on peut dire que la surface du cilindre est double de celle du cône de même hauteur & sur même base.*

Remarquez qu'il ne faut pas confondre la hauteur absoluë de la pyramide avec celle des surfaces planes qui la forment, la premiere est une ligne menée perpendiculairement de la pointe de la pyramide sur le plan qui lui sert de base, & la deuxiéme une autre ligne menée aussi perpendiculairement de la pointe, mais sur un côté du polygone qui lui sert de base, laquelle ligne est plus longue que la premiere. Il en est de même des cônes, dont les hauteurs ou axes sont differentes de celles des côtez.

LEMME I.

81. *La surface de* BCDE, *fragment du cône* ADE, *est égale à celle du trapeze* GHLK.

La surface du cône *AED* est égale au triangle rectangle *FGH* dont *FG* = *AD*, & *GH* égale à la circonference du cercle *DE* *, & celle du cône *ABC* au triangle rectangle *FKL* * L. n. 74.



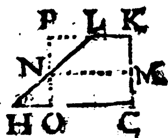
dont *FK* = *AB* & *KL* à la circonference du cercle *CB* : ôtant donc *FKL* de *FGH*, le reste *GHLK* sera égal au fragment *BCDE*, ce qui est évident.

LEMME II.

84.

HC. & KL *sont les rayons des cercles des deux bases d'un fragment de cône.* KC *est coupé en* M *par la moitié,* & MN *est parallele à* KL & HC : *je dis que la surface de ce fragment est égal au rectangle fait de* KC *hauteur de cette surface, & de la circonference d'un cercle, dont* MN *est le rayon.*

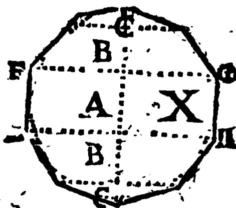
Car la figure *CKLH* = *OCKP*, à cause de l'égalité des deux trianges *HON* & *NPL*, ajoûtez ou retranchez; mais la figure *CKLH* est à celle, qui vient d'être



prouvée égale au fragment du cône en raison du rayon du cercle à sa circonference *. Et *OCKP* est aussi en même raison au rectangle fait de *KC* par la circonference du cercle dont *MN* est rayon; partant ce rectangle est égal au fragment *, ce qu'il falloit démontrer. * L. 4. n. 75. * L. 3. n. 52.

LEMME III.

83. *Si l'on joint les angles d'un spheroïde comme X, par des plans perpendiculaires à son axe qui le divisent en plusieurs parties, ces parties seront ou des cônes comme C, ou des fragmens de cône comme B, ou cilindres comme A.*



Cela est évident.

THEOREME VIII.

84. *Chaque surface des portions d'un spheroïde est égale au rectangle fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle ou sphere inscrite dans ce spheroïde.*

Pour la partie A.

Quant à la partie *A*, il n'y a pas de difficulté, puisque c'est un cilindre dont la surface * est égale au rectangle de *EF* par la circonference d'un cercle dont le diametre est *EH*, lequel est égal au diametre du cercle ou sphere inscrite dans le spheroïde X ; ce qu'il falloit prouver.

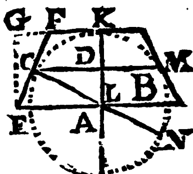
* s n. 68.

Pour la partie B.

Il faut démontrer que la surface de la partie *B*, qui est un fragment de cône, est égale à un rectangle fait de *KL* partie de l'axe du spheroïde à laquelle elle répond, & de la circonference d'un cercle inscrit audit spheroïde, dont *CN* est le diametre. (*Figure suivante.*)

Je partage cette hauteur *KL* par la moitié, menant *CM* parallele à *FK* & à *EL* : je mene aussi *GE* parallele à *KL* à laquelle elle est ég-

le. Le triangle *EFG* & *ACD* sont rectangles ; ainsi *GFE* & *GEF* valent un droit, l'angle *GFE* étant donc égal *FCD**, retranchant de l'angle droit *FCA*, l'angle *FCD*, le reste *DCA* sera égal à *GEF*, ainsi les deux triangles *ACD* & *EFG* sont équiangles : donc *GE* ou *KL*. *EF* : : *CD*. *CA**, partant *KL* est à *EF* comme le double de *CD*, qui est *GM*, est au double de *AC* qui est *CN*. Soit *CM* diametre d'un cercle dont *Y*, est la circonference ; & *CN* celui d'un cercle dont *Z* est la circonference. Donc *CM*. *CN* : : *Y*. *Z*. Donc *KL*. *EF* : : *Y*. *Z*. Donc $KL \times Z = EF \times Y$*. Or la surface de *B*, fragment de cône, est égale à $EF \times Y$*. Donc cette surface égale à $EF \times Y$, est égale à un rectangle fait de *KL* par *Z* circonference d'un cercle dont *CN* est le diametre ; ce qu'il falloit prouver.



* L. 2. n. 25.

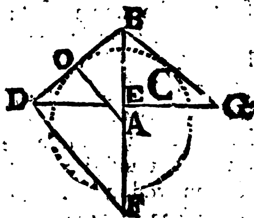
* L. 4. n. 10.

* L. 3. n. 56.

* 5 n. 52.

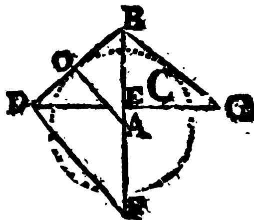
Pour la partie C.

De O moitié de *BD* côté du cône *C*, je méne à *A*, centre du cercle qui est inscrit dans le sphéroïde, la ligne *AO*, & par *D* une parallele à *AO* ; ainsi comme *BG* est moitié de *BD*, *AO* sera moitié de *DF* ; partant *DF* sera le diametre du cercle dont *AO* est le rayon. La surface du cône *C* est égale à un triangle rectangle dont *BD* est la hauteur, & la base est un cercle dont *DG* est



* 3. n. 75. diametre*, ou à un parallelogramme rectangle de même hauteur BD, & dont la base est la moitié de celle d'un cercle dont DG est le diametre*, ou ce qui est la même chose dont la base est égale à un cercle dont DE est le diametre. Soit nommé Y la circonference de cercle, & Z celle du cercle dont DF est le diametre : il faut prouver que $BD \times Y = BE \times Z$.

* L. 2. n. 131.



Les deux triangles DEF & DEB sont semblables*: Donc BD. BE :: DF. DE. Or DF. DE :: Z. Y* : donc BD. BE :: Z. Y* ; donc $BD \times Y = BE \times Z$; ce qu'il falloit prouver.

* L. 4. n. 37. * L. 4. n. 41. * L. 3. n. 56.

THEOREME IX.

85. *La surface d'un spheroïde est égale au rectangle fait de son axe, par la circonference du cercle de la sphere qui lui est inscrite.*

Par le Theorême précedent, puisque la surface de chaque partie du spheroïde est égale au rectangle, faite de chaque partie de son axe à laquelle elle répond, & de la circonference du cercle de la sphere qui lui est inscrite, toute la surface entiere sera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du cercle de la sphere qui lui est inscrite, puisque le tout & ses parties font un produit égal quand ils sont multipliez par une même grandeur*.

* L. 3. n. 17.

THEOREME X.

86. *La surface d'une sphere est égale au rectangle*

de son axe, & de la circonference d'un cercle qui a même diametre que cette sphere.

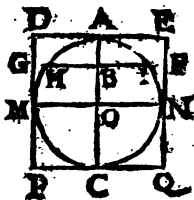
La sphere peut être considerée comme un spheroïde formé par un polygone regulier d'une infinité de côtez *, dont le diametre par consequent peut être pris pour l'axe de la sphere. Ainsi sa surface, par le Theorême précedent, est égale au rectangle fait de son axe par la circonference du cercle ou polygone, par la revolution duquel elle a été formée, dont le diametre par consequent est le même que celui de cette phere ; ce qu'il falloit démontrer. * $\S$ n. 661.

THEOREME XI.

La surface d'une sphere est égale à celle du contour d'un cilindre où elle est inscrite, qui par consequent à la même hauteur ou même axe. 871

La surface de la sphere *AMNC* est égale à un rectangle fait de son axe, & de la circonference du cercle qui a un même diametre *MN* *. * $\S$ n. 86.

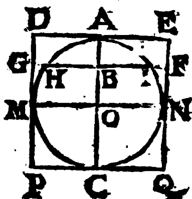
Or la surface du cilindre où cette sphere est inscrite, dont les côtez *DP* & *EQ* sont égaux à *AC* l'axe de cette sphere, est égale à ce même rectangle ; car elle est égale au rectangle fait de *PD* par la circonference du cercle de sa base qui a pour diametre *PQ* égal à *MN* ; puisque le diametre d'une sphere inscrite dans un cilindre doit être égal à celui de la base du cilindre, selon l'idée que l'on a donnée des figures inscrites *. * $\S$ n. 4.



THEOREME XII.

88. *Si on coupe une sphere inscrite dans un cilindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la sphere est égale à celle de la partie du cilindre qui lui répond.*

AC axe de la sphere est la hauteur du cilindre où la sphere est inscrite, ainsi ce cilindre touche par ses deux bases cette sphere. Je coupe l'axe *AC* par des plans perpendiculaires sur lui, qui coupent aussi le cilindre. Je dis que la surface de la partie *MHIN* est égale à celle de la partie *MGFN* du cilindre, comme aussi la surface de *HAI* à celle de *EFGD*.



Car on peut prendre cette sphere pour un spheroïde*, ainsi la partie *MHIN* & *HAI* pour des portions des spheroïdes. Ainsi la surface de *MHIN* est égale au rectangle *BO* par la circonference d'un cercle dont *MN* est le diametre*, lequel rectangle est égal à la surface *FGMN** de même la surface de *HAI* est égale au rectangle de *AB* par la circonference d'un cercle dont *GF* est le diametre*, auquel la surface de la partie *DEFG* est égale*.

*3 n. 66.
*3 n. 84.
*3 n. 68.
*3 n. 84.
*3 n. 68.

PROBLEME I.

89. *Couper une sphere par un plan, de sorte que les surfaces des portions de cette section soient en raison donnée.* Archimede II. Prop. 4. & 5.

Il faut inscrire la sphere dans un cilindre, ensuite couper les côtez du cilindre selon la raison

donnée, & mener par les points de cette section des lignes ou des plans paralleles qui couperont la sphere selon la raison donnée ; car les surfaces des portions de la sphere comprises entre ces paralleles, seront égales à celles des portions du cilindre ausquelles elles répondront, comme on vient de le prouver.

Theoreme XIII.

La surface d'une sphere est égale à quatre fois celle de son plus grand cercle. Archimede I. Prop. 37. 91

Concevons une sphere dans un cylindre, dont la base par consequent sera égale au plus grand cercle de la sphere, & sa hauteur sera le diametre de ce plus grand cercle ; par consequent le contour de ce cilindre sera égal à quatre fois la surface de ce cercle*. Or la surface de la sphere est égale à ce contour* : donc elle est égale à quatre fois son plus grand cercle.

* s. n. 78.
* s. n. 87.

Theoreme XIV.

La surface d'une sphere est égale à celle d'un cercle, dont le rayon est égal au diametre de son plus grand cercle. 92

Soit X une sphere & Z un cercle, dont le rayon est égal au diametre du plus grand cercle de la sphere X. Il faut prouver que la surface de X est égale à celle de ce cercle Z.

Ayant supposé que le diametre du plus grand cercle est 1 ; donc selon l'hypothese, le diametre de Z est 2. Or les surfaces des cercles étant entr'elles comme les quarrez de leurs diametres*, puisque le quarré de 1 est 1, & que celui de 2 est 4, selon l'hypothese, la surface de Z sera quadruple de celle du cercle de la sphere

* L. 4. n. 93.

X. Or la surface de cette sphere est quadruple de celle de son plus grand cercle par le Theorême précedent, donc elle sera égale à celle de Z; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XV.

92. *La surface entiere d'un cilindre*, c'est-à-dire, *tant de son contour que de ses deux bases, est à celle d'une sphere à laquelle il est circonscrit, en raison sesqualiere.* Archimede I. Prop. 39.

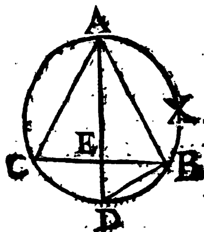
1°. Le seul contour du cilindre est égal à la surface de la sphere*. *8 n. 87.

2°. Chaque base de ce cilindre est le plus grand cercle de la sphere, qui est la quatriéme partie de sa surface*; ainsi les deux bases du cilindre sont la moitié de la surface de la sphere. *8 n. 90.

Partant toute la surface du cilindre est égale, 1°. à une fois toute la surface de la sphere: 2°. à la moitié de cette surface; ainsi cette raison est sesqualiere, c'est-à-dire, comme 3 à 2.

THEOREME XVI.

93. *Une sphere étant coupée par un plan en deux portions, les surfaces de ces portions sont entre elles comme celles des cercles qui ont pour rayons les cordes de la moitié de ces portions, & sont égales à ces cercles.*



Soit X une sphere coupée par le plan *BC*; il faut prouver que les surfaces de ces deux portions sont entr'elles comme celles des surfaces des cercles, dont *AB* & *BD* cordes de la moitié de ces deux portions sont les rayons, & qu'elles leur sont égales.

1°. Ayant inscrit la sphere X dans un cilindre de même hauteur que cette sphere, la surface de la portion ABC sera égale au contour de la partie du cilindre qui lui répond, comme celle de BCD à l'autre partie du cilindre*. Les contours de ces deux parties sont entr'eux comme AE & ED*. Or les quarrez sur AB & BD* sont aussi comme AE à BD* : Donc les surfaces des portions de cette sphere seront entr'elles comme ces deux quarrez, ou les cercles dont ils sont rayons*.

* S n. 86.
* S n. 69.
* L. 4. n. 80.
* L. 4. n. 93.

2°. Le quarré de AD est égal aux quarrez de AB & de BD*; donc la surface du cercle dont AD est le rayon, est égale aux surfaces des deux cercles, dont AB & BD sont les rayons*.

* L. 4. n. 78.
* L. 4. n. 93.

Or le cercle dont AD est le rayon, a sa surface égale à celle de la sphere X*; ainsi cette surface est égale à celle des deux cercles dont AB & BD sont les rayons. Mais il vient d'être dit qu'ils sont aussi entr'eux comme ces portions; donc ils leur seront égaux chacun à celui qui lui répond, puisque le même tout est divisé en même proportion.

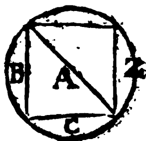
* S n. 92.

THEOREME XVII.

94. *La surface d'une sphere est double de celle du contour du cilindre qui lui est inscrit, & dont la hauteur est égale au diametre de sa base.*

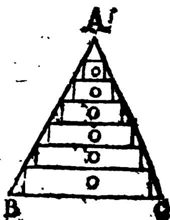
La surface de la sphere Z est quadruple de celle du cercle, dont A est le diametre*.

* S n. 70.



La surface du cercle dont A est le diametre, est égale à la surface des cercles dont C & B sont les diametres, puisque ces surfaces sont comme les quar-

& ils le seront d'autant moins, qu'il y en aura plus. Si on supposoit donc qu'ils fussent infinis en nombre, ils n'auroient plus d'épaisseur ; & alors la surface de *B A C* seroit sans degrez. Ce qui se conçoit de tout parallelipipede, de tout prisme, de toute pyramide & & de tout cône.



PROPOSITION VIII.

103. *On peut concevoir un parallelipipede sur une ligne donnée qui soit semblable, & posé de la même maniere qu'un autre parallelipipede donné.* Eucl. XI. Prop. 27.

Euclide propose de faire la chose ; ce qui n'est pas difficile : mais il suffit qu'on la conçoive faite.

PROPOSITION IX.

104. *Deux solides sont égaux, qui sont composez d'un égal nombre de plans également épais, semblables & égaux.*

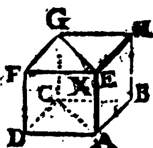
Si par exemple deux solides X & Z étoient composez chacun d'un million de plans également épais & égaux, ils seroient évidemment égaux. J'ajoûte *semblables*, pour marquer qu'en cas que les plans dont X est composé allassent en diminuant, si ceux de Z alloient de même en diminuant chacun étant semblable à celui auquel il répond, c'est-à-dire, le centiéme de X étant égal & semblable au centiéme de Z, il faut que X & Z soient nécessairement égaux.

PROPOSITION X.

105. *Si on coupe le parallelipipede X par un plan*

selon la diagonale AC *ou* EG, *il sera coupé en deux prismes triangulaires égaux.* Eucl. XI. Prop. 28.

Les deux parties de X ont leurs bases égales, elles ont même hauteur : donc par la Proposition précedente, elles sont égales. Selon la Définition des prismes*, elles sont prismes triangulaires. * s n.43.



PROPOSITION XI.

106. *Si les côtez des plans opposez d'un parallelipipede sont coupez en deux également, & qu'on mene des plans par les sections ; la ligne de commune section de ces plans, & le diametre du parallelipipede, se couperont en deux également.* Eucl. XI. Prop. 39.

Cela est évident, car ce diametre est la base d'un triangle coupé parallelement à un de ces côtez par le milieu de l'autre ; ce qui divise également & le côté & la base.

PROPOSITION XII.

107. *Si un solide est compris entre des plans paralleles, ceux de ces plans qui sont opposez, sont des parallelogrammes semblables & égaux.* Eucl. XI. Prop 24. (*Même figure.*)

1°. Les lignes *AD* & *BC* seront paralleles*, comme aussi *AB* & *BC*. Il en est de même des lignes *EF* & *HG*, & de *FG* & *EH*. Ainsi les plans *ABCD* & *EFGH* sont des parallelogrammes. 2°. Ces parallelogrammes sont semblables ; car l'angle *EFG* est égal à *ADC** : ainsi des autres. 3°. *AB* & *HE* paralleles entre les paralleles *AE* & *BH* sont égales, obliques ou * s n.34. * s n.34.

* L. 2. n. 110. perpendiculaires quelles qu'elles soient*: ainsi on peut démontrer que ces plans opposez sont égaux.

THEOREME I.

108. *Toute section d'un parallelipipede, d'un prisme, d'un cilindre, d'une pyramide, d'un cône, qui se fait parallelement à sa base, est semblable à sa base.* Eucl. XI. Prop. 25.

1°. Cela est évident dans le parallelipipede, le prisme, & le cilindre, qui se font par le mouvement toûjours parallele de leurs bases.

2°. Aussi dans la pyramide, dans le cône, qui sont des solides faits par le mouvement de leur base, qui diminuë proportionnellement; ainsi tous les plans paralleles dont on peut concevoir que l'un & l'autre est fait, sont tous semblables. Or ces sections sont quelqu'un de ces plans; par consequent elles sont semblables à la base; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

109. *Tous les solides de même nom, qui ont des bases égales & sont de même hauteur sont égaux, soit droits, soit obliques.* Eucl. XI. Prop. 29. 30. & 31.

C'est-à-dire, que les solides parallelipipedes étant sur bases égales, & de même hauteur, sont égaux entr'eux, ils ont un égal nombre de plans
* n. 101. tous semblables & égaux à leurs bases*; ainsi ils doivent être égaux.

Il en est de même des prismes, des cilindres, des pyramides, des cônes; car chaque plan de l'une est semblable & égal à chacun de l'autre pris à la même hauteur.

COROLLAIRE.

110. *Donc pour mesurer les solides, il faut seule-*

ment

ment avoir égard à leur hauteur, & à leur base.

Car un parallelipipede oblique a bien plus de surface qu'un droit. Cependant s'il est sur une base égale, & de même hauteur, il n'est pas plus grand.

THEOREME III.

Les solides parallelipipedes & les prismes de même hauteur, sont l'un à l'autre comme leurs bases; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XI. Prop. 32. 111.

Soient les deux solides Z & X. 1°. Ils ont un égal nombre de plans paralleles*, & semblables à leurs bases. Si leurs bases sont égales, ils sont donc égaux; si celle de Z est double de celle de X, alors tous les plans de Z étant doubles de ceux de X, il faut que Z soit double de X. 2°. Si ces deux solides ont leurs bases égales, ils seront comme leurs hauteurs; car tous leurs plans étant égaux, si le solide Z est deux fois plus haut que X, il doit avoir deux fois plus de ces plans. S'il est trois fois plus haut, il en aura trois fois plus.

*Sn. 101.

THEOREME IV.

Deux cilindres de même hauteur sont comme leurs bases; ou si ils ont une même base, ils sont comme leurs hauteurs. Eucl. XII. Prop. 11. & 14. 112.

Cela vient d'être démontré du prisme, & par consequent du cilindre.

THEOREME V.

Si un cilindre est coupé par un plan parallele aux plans opposez de ses bases, les segmens du 113.

cilindre seront l'un à l'autre comme les segmens de l'axe. Eucl. XII. Prop. 13.

3 n. 98. Les plans de ces sections seront égaux. Tous les segmens seront donc comme autant de cilindres qui ont leurs bases égales, & partant ils sont entr'eux comme des segmens de l'axe, qui sont leur hauteur par le précedent Theorême.

THEOREME VI.

114. *Un parallelipipede est double d'un prisme triangulaire de même hauteur, si la base du parallelipipede est double du triangulaire.* Eucl. XI. Prop. 40.

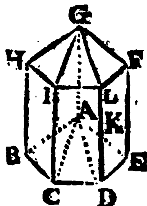
Cela est évident, puisque ces deux primes sont comme leurs bases*.

*3 n. 111.

THEOREME VII.

115. *Tout prisme polygone peut être divisé en prismes triangulaires.*

Soit K un prisme polygone dont les bases sont *ABCDE* & *GHILF* : ces bases polygones se reduisent en triangles. Par la Définition des prismes triangulaires, les solides *A B C G H I*, *A C D G I L*, *A D E G L E* sont des prismes triangulaires : donc le prisme K peut-être divisé en prismes triangulaires.



THEOREME VIII.

116. *Un prisme est égal à plusieurs prismes de même hauteur, si sa base est égale à celles de tous ces prismes. Il en est de même des pyramides.*

Car concevant dans ces solides des plans pa-
3 n. 97. ralleles à la base, il y aura un égal nombre de
3 n. 101. plans dans chacun; chaque plan dans le grand

prisme sera égal à tous les plans qui seront dans les autres prismes ; car il leur sera comme sa base est à toutes les bases de ces prismes. Or elle leur est égale ; donc, &c. Il en est de même des pyramides.

COROLLAIRE I.

Un cilindre est égal à un prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à la sienne. 117.

Un cilindre est un prisme polygone. Tout prisme polygone peut-être divisé en prismes triangulaires*. Ces prismes seront égaux à un seul prisme triangulaire de même hauteur, dont la base est égale à toutes celles de ces prismes*. Partant le cilindre égal à ce prisme polygone, l'est à ce prisme triangulaire qui a même hauteur, & dont la base est égale à la sienne.

* S.n.115.

* S.n.116.

COROLLAIRE II.

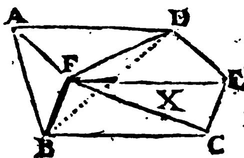
Donc un cilindre X *est égal à plusieurs cilindres* A, B, C, &c. *de même hauteur, dont toutes les bases prises ensemble sont égales à la sienne.* 118.

Car tous ces cilindres seront égaux à autant de prismes triangulaires, qui ont même hauteur & bases égales. Celui auquel X est égal, & partant de même hauteur & sur base égale, est égal à tous ces autres prismes triangulaires, & partant aux cilindres *A, B, C, &c.* dont toutes les bases sont égales à celle de X ; partant X est égal à *A, B, C, &c.*

THEOREME IX.

Un prisme triangulaire se divise en trois pyramides triangulaires égales. Euclide XII. Prop. 7. 119.

Soit X un prisme triangulaire ; je méne sur chacune de ses trois faces des diagonales, qui feront six triangles. Les triangles BAD, BCD sont



* L. 2. n. 128. égaux*, les pyramides BADF & BDCF qui ont même sommet, & partant même hauteur, sont
Sn. 109. égales. Ayant ôté, par la pensée de ce prisme X, ces deux pyramides, il en reste une troisiéme sçavoir FCED, laquelle a premierement même sommet D, & partant même hauteur que la pyramide FBCD, elles ont des bases égales, sça-
* L. 2. n. 128. voir les triangles égaux FBC & FCE* : donc
Sn. 109. elles sont égales. Or la pyramide FBCD est la même que BDCF, étant formée par les mêmes triangles : donc les pyramides FCED & BADF seront égales, l'étant à une troisiéme ; ainsi le prisme X peut être divisé en trois pyramides égales, qui sont BADF, BDCF & CEDF.

COROLLAIRE I.

120. *Donc toute pyramide est le tiers de tout prisme de même hauteur, qui est sur même base, ou sur base égale.*

COROLLAIRE II.

121. *Donc pour mesurer une pyramide, il faut multiplier la base par le tiers de sa hauteur.*

LEMME.

122. *Une pyramide polygone se peut diviser en pyramides triangulaires.*

La base d'une pyramide poligone est un poligone, qui par conséquent se réduit en trian-

gles, sur lesquels concevant des plans élevez le long des côtez de cette pyramide jusqu'à son sommet, on aura plusieurs pyramides triangulaires, qui seront les parties de la pyramide polygone.

THEOREME X.

Les pyramides qui ont pour base des triangles, & qui sont de même hauteur, sont entre elles comme leurs bases. Il en est de même de celles qui qui ont des polygones pour leurs bases. Eucl. XII. Prop. 5. & 6. 123

Les prismes sont triples des pyramides de même base & de même hauteur*. Mais les prismes de meme hauteur sont entr'eux comme leurs bases, ou ceux de même base sont comme leurs hauteurs*: donc aussi les pyramides, qui ne sont que le tiers. Par le Lemme précedent, on peut confondre les pyramides polygones avec les triangulaires, puisqu'elles s'y résolvent.

* s n. 120.
* s n. 119.

THEOREME XI.

Toute pyramide ayant base triangulaire peut être divisée en deux pyramides égales, semblables entr'elles, & à la totale, & en deux prismes égaux & plus grands que la moitié de la pyramide totale. Eucl. XII. Prop. 3. 124

THEOREME XII.

Deux pyramides de même hauteur ayant des bases triangulaires, soient divisées en deux autres pyramides égales entr'elles & semblables à la toute & en deux prismes égaux; & que les pyramides provenuës de cette division soient toûjours divisées de la même façon: comme la base de l'une des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi tous les prismes qui sont en l'une des pyra- 125

mides, seront à tous les prismes de l'autre égaux en nombre. Eucl. XII. Prop. 4.

Ces deux propositions n'ont rien de fort utile; ainsi je n'en rapporte point les démonstrations.

THEOREME XIII.

126. *Toute pyramide polygone est le tiers de tout prisme de même hauteur, & qui est sur même base ou sur base égale.*

Car ayant réduit en trianges l'une & l'autre base de ces deux solides, la pyramide polygone sera divisée en pyramides triangulaires. Or chacune de ces pyramides triangulaires, sera le tiers de chacun de ces prismes triangulaires * : ainsi toute la pyramide polygone sera le tiers de tout le prisme polygone.

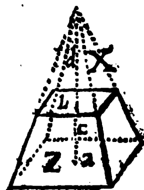
*Tn. 120.

AVERTISSEMENT.

127. *On donne cette regle pour trouver la solidité de Z un fragment de pyramide dont les bases sont paralleles ; soit par exemple l'inferieure 36, la superieure 9, ce nombre 18 est moyen entre ces deux nombres.*

Il les faut ajoûter dans une somme, & multiplier cette somme par 2 que je suppose le tiers de la hauteur du fragment, le produit 126 sera la solidité de ce fragment. Examinons cette regle.

Soit a *la base inferieure*, b *la superieure*, c *la hauteur de Z fragment*, d *le reste de l'axe pour achever la pyramide*, aac + aad *est la solidité d'un prisme qui est le triple de toute la pyramide, dont j'ôte* bbd *la solidité d'un prisme, dont la pyramide X est le tiers : Ainsi* aac + aad — bbd = 3Z. *Puisque* ÷ aa. ab.



bb; *Donc, selon la regle, en multipliant ces trois termes qui sont les mêmes que* 36, 18, 9 *par le tiers de* c, *j'aurai la solidité de* Z; *ainsi multipliant par tout* c, *j'aurai* aac + abc + bbc = 3Z, *reste à démontrer que* aac + aad — bbd = aac + abc + bbc : *j'ôte* aac *de part & d'autre, reste* aad — bbd = abc + bbc. *Il faut voir si cela est.*

a — b. b :: c. d, *multipliant* a — b *&* b *par* a + b*, aa — bb. ab + bb :: a — b. b. *Ainsi* aa — bb. ab + bb :: c. d* : *Donc multipliant les extrêmes & les moyens, on a* aad — bbd = abc + bbc* ; *ce qui restoit à prouver. La regle est donc sûre.* * L. 5. n. 54. * L. 5. n. 53. * L. 5. n. 56.

THEOREME XIV.

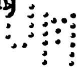
Un cône est le tiers d'un cilindre de même hauteur sur bases égales. Eucl. XII. Prop. 10. 128.

Un cône est une pyramide d'une infinité de côtez : or une pyramide est le tiers d'un prisme de même hauteur, qui a une base égale* : donc le cône est aussi le tiers d'un cilindre de même hauteur, & sur même base ou base égale, puisqu'un cilindre est un prisme d'un nombre infini de côtez. * Sn. 120.

COROLLAIRE I.

Un cône est égal à tous les cônes de même hauteur, dont les bases pris ensemble sont égales à la sienne. 129.

Ces cônes sont des pyramides d'un nombre infini de côtez, lesquels sont le tiers du cilin-



dre ou du prisme ; ainsi cette proposition n'est
3n.116. pas differente de celle qu'on a proposée.

COROLLAIRE II.

130. *Deux cônes de même hauteur sont comme leurs bases ; & s'ils ont même base, ils sont comme leurs hauteurs,* Eucl. XII. Prop. 11. & 14.

Cela est évident.

THEOREME XV.

131. *Les prismes & les parallelipipedes semblables sont en raison composées des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée.* Eucl. XI. Prop. 33.

Leur solidité dépend de la multiplication
3n.110. de leurs dimensions. La raison qu'ils ont en-
tr'eux est composée de celle de leurs trois dimen-
L. 3. n. 78. sions. Etant semblables, cette raison est triplée*.
*L. 3. n. 74.

THEOREME XVI.

132. *Les cilindres semblables sont entr'eux en raison composée de leurs dimensions, & cette raison est triplée.* Eucl. XII. Prop. 12.

Car ces cilindres étant comme des prismes dont les bases sont d'un nombre infini de côtez, ils seront entr'eux comme ces prismes par le précedent Theorême.

THEOREME XVII.

133. *Les pyramides semblables sont en raison composée des raisons de leurs trois dimensions, & cette raison est triplée.* Eucl. XII. Prop. 8.

Cela est évident, car elles sont le tiers des prismes qui sont sur leurs bases, & qui ont même
8n.120. hauteur ; & ainsi en même raison.

THEOREME XVIII.

Les cônes semblables sont entr'eux en raison composée des raisons de leurs dimensions, & cette raison est triplée. Eucl. XII. Prop. 12. 134.

C'est une suite ; car les cônes sont des pyramides sur des bases d'un nombre infini de côtez.

THEOREME XIX.

Les cilindres semblables sont entr'eux comme les cubes des diametres de leurs bases. 135.

Ils sont en raison triplée de chacune de celles de leurs trois dimensions, & par consequent de la raison des diametres de leurs bases. Or les cubes de leurs diametres sont en raison triplée de celle de ces mêmes diametres*. Donc puisque les raisons composées d'égales raisons sont égales, les cilindres semblables sont entr'eux comme les cubes des diametres de leurs bases. Il en est de même des cônes semblables, & cela se démontre de la même maniere.

*L. 3. n. 82.

THEOREME XX.

Les parallelipipedes égaux ont leurs bases & leurs hauteurs réciproques ; & si elles sont réciproques, ces deux solides sont égaux. Eucl. XI, Prop. 34. 136.

Soient *X* & *Z* deux parallelipipedes égaux ; *A* la hauteur de *X*, & *B* celle de *Z*, *M* la valeur de la base de *X*, & *N* la valeur de la base de *Z*. Selon qu'on le suppose, $A \times M = B \times N$: Donc $A . B :: N . M$* ; partant les quatre grandeurs *A*, *M*, *B*, *N* sont réciproques*. Or si ces quatre grandeurs sont réciproques, c'est-à-dire, si *A*, *M*, *B*, *N* peuvent être rangez de sorte que $A . B :: N . M$, il faut que $A \times M = B \times N$*,

*L. 3. n. 58.
*L. 3. n. 61.
*L. 3. n. 56.

THEOREME XXI.

137. *Deux cilindres étant égaux, il en est de même des pyramides & cônes, leurs hauteurs & leurs bases sont réciproques ; & si elles sont réciproques, ces deux cilindres sont égaux.* Eucl. XII. Prop. 9. & 15.

La démonstration du Theorême précedent sert à celui-ci ; il n'y a qu'à entendre par X & par Z deux cilindres.

THEOREME XXII.

138. *Si* A, B, C *trois lignes droites sont proportionnelles, le solide parallelipipede* ABC *fait de ces trois lignes, est égal au parallelipipede* BBB *fait de la moyenne* B, *pourvû que ces solides soient équiangles.* Eucl. XI. Prop. 36.

*L. 3. n. 57. ÷ *A. B. C.* Donc *AC* = *BB* *. Donc multipliant *AC* & *BB* par *B*, le produit *ACB* sera encore égal au produit *BBB* *. Or *ACB* est le parallelipipede fait des trois lignes *A*, *B*, *C*, égal ainsi à *BBB* fait de la moyenne *B*.

* L. 3. n. 54.

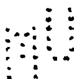
THEOREME XXIII.

139. A, B, C, D *sont quatre lignes proportionnelles ; Les solides semblables faits sur ces lignes sont en proportion ; & s'ils sont en proportion, ces quatre lignes sont proportionnelles.* Eucl. XI. Prop. 37.

* L. 3. n. 85. Cela a été prouvé *.

THEOREME XXIV.

140. *Une sphere est égale à un cône, ou pyramide polygone, qui a pour axe le rayon de cette sphere,*



& pour base un cercle, dont le rayon est le diametre de cette même sphere.

1°. En concevant une infinité de cônes ou de pyramides polygones, dont le sommet est dans le centre d'une sphere; & les bases dans la surface de la même sphere; il est évident qu'on peut dire, que la solidité de cette sphere est égale à tous ces cônes ou pyramides polygones, puisque c'est dire que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

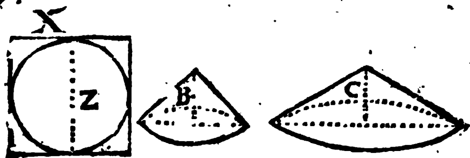
2°. Tous ces cônes sont égaux à un cône qui a même hauteur, à sçavoir le rayon de cette sphere, & pour base toute la surface de cette sphere, qui est égale aux bases de ces cônes*. *5. n. 119.

3°. Or la surface de cette sphere est égale à celle d'un cercle, qui a pour rayon le diametre de cette sphere* : donc la solidité est égale à celle d'un cône dont la base, &c. *5. n. 97.

Supposé la raison du diametre à la circonference du cercle comme 7 à 22, on peut dire que la solidité de la sphere est au cube de son diametre comme 11 *à* 21 : *car soit* m *la circonference du cercle, &* n *le diametre.* 1°. mnn. nnn :: m. n*. *L. 3. n. 54. 141.
Or m *est à* n *comme* 22 *à* 7, *ou* 66 *à* 21. *Ainsi la sixiéme partie de* mnn, *qui est la solidité de la sphere, suivant ce qui se conclue facilement de ce qui a été précédemment démontré, est à* nnn *cube de son diametre, comme la sixiéme partie de* 66, *c'est-à-dire,* 11 *est à* 21 ; *ce qu'il falloit prouver.*

THEOREME XXV.

La raison de X *cilindre à la sphere* Z *qui lui est inscrite, est sesquialtere.* 142.



Soient *B* & *C* deux cônes qui ayent pour axe le rayon de la ſphere *Z*, & que le rayon de la baſe de *B* ſoit celui de la ſphere *Z*, & le rayon de la baſe de *C* ſoit l'axe ou le diametre de la même ſphere *X*, alors ces deux cônes *B* & *C*
*§ n.130. seront comme leurs baſes *. Or celle de *C* eſt quadruple de celle de *B* : donc le cône *C* eſt quadruple du cône *B* ; ainſi *B*. *C* : : 1. 4 le plus petit cône *B* eſt la ſixiéme partie du cilindre *X*, qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere *Z*, & pour axe le diametre ; car ce cône *B* eſt le tiers d'un cilindre, qui a même baſe que lui &
*§ n.128. même axe * ; par conſequent il eſt la ſixiéme partie d'un cilindre qui a même baſe, & un axe deux fois plus grand ; ainſi *X*. *B* : : 6. 1. Le cône
*§ n.140. *C* eſt égal à la ſphere *Z* *, on a prouvé que *B*. *C* : : 1. 4 ; ainſi *B*. *Z* : : 1. 4 : donc puiſque le cilindre *X* vaut ſix parties, telles que la ſphere *Z* en vaut quatre *X*. *Z* : : 6. 4 ; ce qui eſt une raiſon ſeſquialtere.

Theoreme XXVI.

143. *Les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs diametres, ou en raiſon triplée de celle de leurs diametres.* Eucl. XII. Prop. 18.

Les ſpheres ſont en raiſon composée des raiſons de leurs trois dimenſions, toutes les ſpheres ſont ſemblables ; ainſi leurs trois dimenſions ont même raiſon : Donc la raiſon qu'elles com-

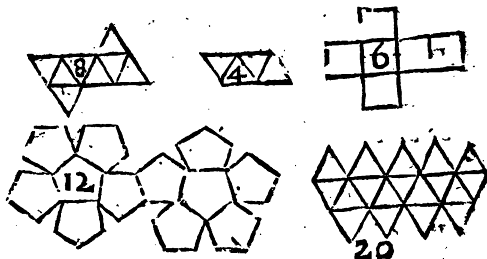
posent est triplée de chacune des raisons de leurs dimensions ; par exemple, de celle de leurs diametres. Or les cubes de ces diametres sont en raison triplée de celle de ces diametres : donc les spheres sont entr'elles comme les cubes de leurs diametres.

SECTION V.

De la maniere d'inscrire ou circonscrire à une sphere les cinq corps reguliers.

AVERTISSEMENT.

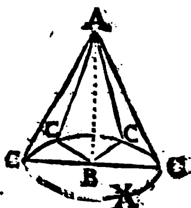
IL faut faire avec du carton les cinq corps reguliers ; la seule vûë de la figure suivante en apprend le moyen. Après avoir tracé ces figures & coupé le carton, on le plie de maniere que les plans qui composent ces corps reguliers se joignent ensemble. 144.



THEOREME I.

Toute section d'une sphere par un plan, est un cercle. 145.

X est la section d'une sphere dont *A* est le centre ; il faut prouver que cette section est un cercle : pour cela concevons 1°. que du centre *A* de la sphere on fait tomber sur le plan de cette section, que je nomme X une perpendiculaire *AB*. 2°. Que l'on tire du même centre *A* des lignes telles que *AC*, à tous les points des extrémitez de X : toutes ces lignes qui sont rayons de la sphere, sont égales. Elles sont obliques ; puisqu'on ne peut mener de *A* plus d'une perpendiculaire sur X. Or les obliques égales ont leur pié également éloigné de la perpendiculaire * donc toutes ces lignes menées des extrémitez de X au point *B* sont égales, & par consequent ces extrémitez sont dans la circonference d'un cercle ; ainsi X est un cercle, suivant sa définition *.



* L. 1. n. 61.

* L. 1. n. 80.

P R O B L E M E I.

146. *Deux cercles inégaux étant concentriques ; inscrire au plus grand un polygone regulier ayant un nombre pair de côtez, de sorte que ce polygone ne touche point le plus petit.* Euclid. XII. Prop. 16.

P R O B L E M E II.

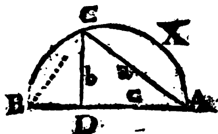
147. *Deux spheres inégales ayant un même centre ; inscrire en la plus grande un* poliedre, *duquel les plans ne touchent point la surface de la petite sphere.* Eucl. XII. Prop. 17.

Ces deux Problêmes ne me paroissent point nécessaires, ainsi je les passe.

LEMME PREMIER.

Si aa *quarré de* AC *est triple de* bb *quarré de* CD *moyen proportionnel entre* AD *&* BD, *je dis que* DB *est la troisiéme partie du diametre* AB. 148

Soit *AD* nommé *c*. 1°. $aa = bb + cc$*, & puisque par la supposition $3bb = aa$: donc $3bb = bb + cc$: ôtant de part & d'autre bb, on aura $2bb = cc$. * L. 4. n. 78.

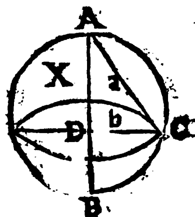


2°. $\div$ *AD*. *CD*. *BD*, ou $\div$ *c*. *b*. *BD* par l'hypothese : donc *cc* ou $2bb.\ bb :: AD.\ DB$*. Donc *AD* sera double de *BD*, & consequemment *DB* est un tiers de *AB* ; ce qu'il falloit prouver. * L. 3. n. 86.

THEOREME II.

Le quarré d'un des côtez du tetraëdre *ou pyramide équilaterale, est égal à six fois le quarré de la troisiéme partie du diametre la sphere où il est inscrit.* 149

Le *tetraëdre* ou pyramide équilaterale, est fait de quatre triangles égaux & équilateraux. Concevons que dans la sphere *X* il y a un *tetraëdre* inscrit, dont *AC* ou *a* est un des côtez, & que *CD* est le rayon du cercle dans lequel est inscrit un des triangles équilateraux qui composent ce solide : $\overline{AC}^2 = 3\overline{CD}^2$, ou $aa = 3bb$ * par consequent *DB* est la troisiéme partie de *AB* diametre de la sphere *X* par * L. 4. n. 146.



* L. 4. n. 28. le Lemme précedent. Soit donc $BD = c$, & par consequent $AB = 3c$. Puisque $\div\div$ $3c.\ a.\ 2c$* :
* L. 3. n. 57. donc $6cc = aa$* ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

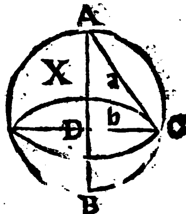
350. *Le quarré du diametre de la sphere, est en raison sesquialtere avec le quarré d'un des côtez du* tetraëdre *qui lui est inscrit.* Eucl. XIII. Prop. 13.

On vient de prouver que aa, quarré du côté du *tetraëdre*, est égal à six fois le quarré de c troisieme partie du diametre de la sphere. Or le quarré de $3c$ diametre de la sphere est $9cc$; ainsi la raison du quarré du côté du *tetraëdre* à celui du diametre de la sphere sera comme $6cc$ à $9cc$, ou 6 à 9, qui est une raison sesquialtere.

THEOREME III.

351. *Le côté du* tetraëdre *est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diametre de la sphere où il est inscrit.*

Soit comme ci-dessus AC, ou a côté du *tetraëdre*, & AB ou $3c$ diametre de la sphere, dont DB par ce qui a été démontré dans le Theorême précedent, est égal à c, & $AD = 2c$; ainsi

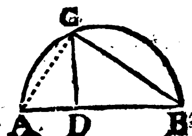


* L. 4. n. 28. $\div\div$ $3c.\ a.\ 2c$* : donc $9cc.\ aa :: 3c.\ 2c$*. Or ces nombres 3 & 2 ne sont pas nombres quarrez ; donc a sera incommensurable en lui-même avec $3c$, & com-
* L. 3. n. 26.
* L. 4. n. 115. mensurable en puissance*. Nous venons de voir dans le Theorême précedent que aa est au quarré du diametre de la sphere comme 6 à 9.

PROBLEME III.

Inscrire un tetraëdre *dans une sphere, ou trouver un cercle capable d'une des faces du* tetraëdre. Eucl. XIII. Prop. 13. 152

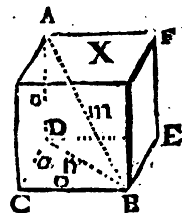
Il faut couper *AB* diametre de la sphere en trois parties égales, de sorte que *DB* soit double de *AD*, & sur *D* élever la perpendiculaire *DC*, laquelle sera le rayon d'un cercle dans lequel ayant fait un triangle équilateral dont *BC* est le côté, vous aurez une des faces du *tetraëdre*, comme il est évident*. *8 n.149



THEOREME IV.

Le quarré du diametre de la sphere est triple du quarré de chaque côté du cube, ou de l'exaëdre qui lui est inscrit. Eucl. XIII. Prop. 15. 153

Le cube ou l'*exaëdre* X est inscrit dans une sphere. Soit la diagonale $AB = m$, qui est le diametre de la sphere, la diagonale d'une des faces du cube soit *BD*. Je nomme *o* tous les côtez de ce cube, qui sont tous égaux. $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$, ou $mm = nn + oo$*. De même $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$, ou $nn = 2oo$. Substituant donc en place de nn sa valeur $2oo$, on aura $mm = 3oo$, qui est ce qu'il falloit démontrer. *L. 4. n. 78.

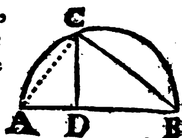


PROBLEME IV.

Le diametre de la sphere étant donné, trouver 154

*le côté du cube ou de l'*exaëdre *qui peut y être inscrit, ou trouver un cercle capable d'une des faces du cube.* Eucl. XIII. Prop. 15.

Soit *AB* le diametre de la sphere où il faut inscrire un cube, je le divise en trois parties, de sorte que *BD* est double de *AD* : sur *D* j'éleve la perpendiculaire *CD*, & de *C* je mene une ligne à *A*, qui sera le côté du cube que je cherche. Car soit *BA* = 3*c* & *CA* = *d* : donc ∺ 3*c*. *d*. *c* *. Donc 3*cc* = *dd* *. Le quarré de *AB* ou de 3*c* est 9*cc*; donc le quarré de *AB* est triple de celui de *d*, qui ne vaut que 3*cc*. Partant *AC* est le côté du cube qu'on cherchoit, par le Theorême précedent.



* L. 4. n. 28.
* L. 3. n. 87.

Ensuite si on veut avoir le cercle capable d'une face du cube, il faut faire un quarré dont *AC* soit un des côtez, & lui circonscrire un cercle qui sera celui qu'on demande.

THEOREME V.

355. *Le côté du cube est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec le diametre de la sphere.* (Même figure.)

AC ou *d*, côté du cube, est moyen proportionnel entre tout le diametre *AB* ou 3*c*, & sa troisiéme partie *c* ; ainsi puisque ∺ 3*c*. *d*. *c* ; donc 3*c*. *c* :: 3. 1. Ces deux nombres 3 & 1 ne sont pas deux nombres quarrez, partant *AC* est incommensurable avec *AB* en lui-même ; mais commensurable en puissance, puisque son quarré est le tiers de *AB* *.

* L. 4. n. 231.

THEOREME VI.

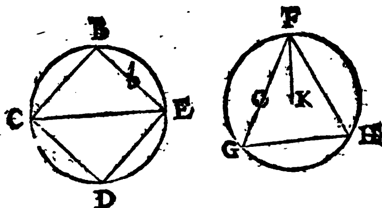
356. *Le quarré de chaque côté d'un* octaëdre *est la*

moitié de celui du diametre de la sphere où il est inscrit, Euclid. XIII. Prop. 14.

Un *octaëdre* est composé de huit triangles équilateraux tous égaux, dont les côtez sont cordes du quart du cercle ou de nonante degrez. Or il est évident que le quarré de la corde de nonante degrez est la moitié de celui du diametre : car deux cordes de nonante degrez font un angle droit, dont la base est le diametre du cercle ; ainsi le quarré de ces deux cordes est égal à celui du diametre, qui est par consequent le double de celui de chacune de ces deux cordes.

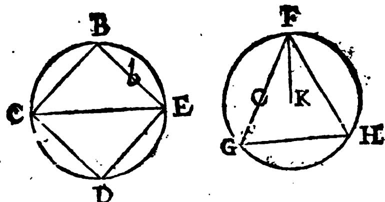
Theoreme VII.

*Le même cercle comprend le quarré qui est une des faces du cube, & le triangle qui est une des faces de l'*octaëdre*, l'un & l'autre inscrit dans la même sphere.* Eucl. XIV. Prop. 8. 15[illegible]



Soit *BCDE* un quarré face d'un cube, inscrit dans un cercle. *FGH* est un triangle face d'un *octaëdre* inscrit dans un cercle. Il faut démontrer que si ces deux solides sont inscrits dans une même sphere, ces deux cercles sont égaux.

Soit *a* le diametre de la sphere, *b* le côté du quarré qui est une des faces du cube, & *c* le côté du triangle qui est une des faces de l'*octaëdre*. Soit nommé *y* le rayon du cercle capable du



quarré du cube, & x celui du cercle qui est capable du triangle de l'*octaedre*. Il faut prouver que $y = x$.

1°. Si on conçoit bb le quarré du cube inscrit dans un cercle dont y est le rayon, il est évident

L. 4. n. 78. que $2yy = bb$. Et puisque $3bb = aa$* : donc

S n. 153. $aa = 6yy$. 2°. $3xx = cc$. Or $2cc = aa$* : donc

* L. 4. n. 146. $6xx = aa$. Ainsi puisque $6yy = aa = 6xx$, donc $6yy = 6xx$; donc $y = x$: ce qu'il falloit

*S n. 156. prouver.

Theoreme VIII.

158. *Le côté d'un* octaëdre *est incommensurable en lui-même, & commensurable en puissance avec diametre de la sphere où il est inscrit.*

Le quarré de chaque côté de l'*octaëdre* est à

S n. 156. celui du diametre de la sphere, comme 1 à 2. Or 1 & 2 ne sont pas des nombres quarrez ; donc ce côté est incommensurable en lui-même, avec

L. 4. n. 115. le diametre de la sphere, & commensurable en puissance, puisque son quarré est moitié de celui de la sphere.

Probleme V.

159. *Trouver le côté d'un* octaëdre, *& un cercle capable d'une des faces de ce solide,*

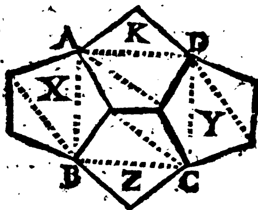
Trouvez par le Problême quatriéme un cercle

capable d'un des côtez du cube. Par le Theoréme septiéme, ce cercle est capable d'une des faces de l'*octaëdre.* Il ne s'agit donc que de faire un triangle équilateral dans ce cercle. Le côté de ce triangle sera celui qu'on cherche.

Theoreme IX.

Ayant mené des diagonales ou cordes sur les douze pentagones qui sont le dodecaëdre. *celles de ces diagonales qui se joindront formeront six quarrez qui sont les six faces d'un* exhaëdre *ou cube inscrit dans la même sphere que le* dodecaëdre. 160

Soient KXZY quatre pentagones faces d'un *dedocaëdre* (*ayez à la main en lisant ceci un* dedocaëdre) concevez sur chacune de ces faces des diagonales, une de *A* à *B*, de *B* à *C*, de *C* à *D*, & de *D* à *A*. Ainsi sur toutes les autres faces; il faut prouver 1°. que ces quatre diagonales font un quarré, sçavoir *ABCD*. 2°. Que les autres diagonales avec celles-ci, forment six quarrez égaux à *ABCD*, lesquels font un cube inscrit dans la même sphere que le *dodecaëdre*; ainsi chaque côté de ce cube est égal à chaque diagonale des pentagones.

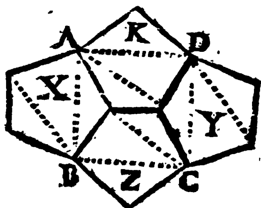


1°. Toutes ces diagonales sont égales, soûtenant des angles égaux.

2°. Concevons que des quatre points *A*, *B*, *C*, *D* qui sont sur la sphere où le *dodecaëdre* est inscrit, on ait mené des lignes au centre de la sphere, cela fera une pyramide quadrilatera-

le, dont le plan qui couperoit la sphere & passeroit par ces quatre points feroit la base.

3°. Cette section de la sphere par le plan *ABCD* sera un cercle*. Or on ne peut inscrire aucune figure de quatre côtez égaux dans un cercle, que le seul quarré ; car ces quatre angles valent quatre droits* : & puisqu'ils sont appuyez sur des arcs égaux, ils sont égaux. Donc la figure *ABCD*, qui a ses côtez égaux, & qui est inscrite dans un cercle, est un quarré.



* L. 2. n. 113.

4°. Tout pentagone se peut réduire en trois triangles ; partant la surface d'un *dodecaëdre*, composée de douze pentagones, se reduit en trente-six triangles. Or chaque quarré égal à *ABCD* en soûtient six, comme il se voit dans la figure ; donc ces trente-six triangles ne peuvent être soûtenus que par six quarrez égaux, qui forment un cube inscrit dans la même sphere ; & partant il est vrai de dire que la diagonale d'un pentagone, qui est une des faces du *dodecaëdre* inscrit dans une sphere, est égale au côté du cube inscrit dans la même sphere.

PROBLEME VI.

161. *Trouver le côté d'un* dodecaëdre, *& un cercle capable d'une des faces de ce solide.* Eucl. XIII. Prop. 17.

Il faut premierement trouver le côté d'un cube inscrit dans la sphere proposée*. Ce côté est égal à la diagonale de chaque pentagone face du *do-*

*decaëdre**. Il faut couper ce côté en moyenne & extrême raison : la plus grande partie sera le côté du *dodecaëdre* proposé*. *Sn.160 *L.4.n.153.

Pour avoir le cercle capable d'une des faces du *dodecaëdre*, il faut faire le pentagone dont on vient de connoître un des côtez*, ensuite lui circonscrire un cercle, qui sera ce qu'on cherche. *L.4.n.159.

THEOREME X.

161 *Le côté du* dodecaëdre *est incommensurable avec le diametre de la sphere, tant en lui-même qu'en seconde puissance.* Eucl. XIII. Prop. 17.

Soit diametre de la sphere *b*, celui du côté du cube inscrit dans la sphere *c* + *d* coupé en moyenne & extrême raison, dont *c* la plus grande partie est le côté du *dodecaëdre**. *L.4.n.153.

2°. *c* est incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, avec *c* + *d**. *L.4.n.140.

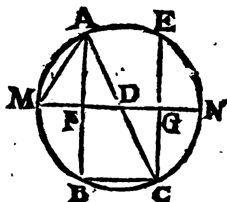
3°. *c* + *d* est commensurable en deuxiéme puissance avec *b**, c'est-à-dire, que *cc* + 2*cd* + *dd* est commensurable avec *bb*. Il faut donc que *cc* soit incommensurable avec *bb* ; car s'il étoit commensurable avec *bb*, il le seroit avec le quarré de *c* + *d**, avec lequel *bb* est commensurable, puisque *bb* est le triple de ce quarré*, par consequent *cc* incommensurable en puissance avec *bb*, est aussi incommensurable en lui-même avec *b**. *Sn.155 *L.4.n.113. *Sn.153 *L.4.n.115.

LEMME II.

163 MN *est le diametre d'un cercle, dans lequel les deux cordes* AB *&* CE *qui coupent* MN *à angles droits, sont paralleles entr'elles, & la distance de* FG *égale à la moitié de chacune ; je dis que* MF *sera le côté d'un decagone inscrit dans un cercle, dont* FA *sera le rayon.*

Supposant MF ou $GN = x$ & $AF = z + x$: si MF ou x est le côté d'un decagone, dont AF ou $z + x$ est le rayon ; il faut qu'ayant coupé AF en moyenne & extrême raison, x en soit la mediane*, & que par consequent $\div\!\div z + x . x . z$; ainsi si nous démontrons céla, sçavoir que $\div\!\div z + x . x . z$, nous avons fait ce qui est proposé.

* L. 4. n. 151.



Puisque $AF = z + x$; donc $AB = 2z + 2x$, & $BC = z + x$. Le quarré de AB, qui est $4zz + 8zx + 4xx$, avec celui de BC qui est $zz + 2zx + xx$ sont égaux à celui de AC ou MN*. Or par l'hypothese $MN = 3x + z$; car MF & GN sont chacun égaux à x, & $FG = z + x$: le quarré dis-je de $3x + z$ est $9xx + 6xz + zz$: mettant donc les deux quarrez de AB & de BC en une somme $9xx + 6xz + zz = 5zz + 10zx + 5xx$; ôtant de part & d'autre $5xx + 6xz + zz$, il restera $4xx = 4zz + 4zx$; divisant l'un & l'autre par 4, il viendra $xx = zz + zx$; donc remettant cette égalité en proportion * on aura $\div\!\div z + x . x . z$, puisque le produit des extrêmes $z + x$ & z, qui est $zz + zx$, est égal à xx quarré de la grandeur moyenne x ; c'est ce qu'il falloit démontrer.

* L. 4. n. 28.

* L. 3. n. 58.

LEMME III.

164. *La ligne* AM *est le côté d'un pentagône inscrit dans un cercle, dont* AF *est le rayon.* (Même figure.)

MF est le côté du decagone dans un cercle dont

dont *AF* est le rayon*, le quarré de *AF* avec celui de *MF* sont égaux à celui de *AM* ; donc *AM* est le côté du pentagone*. *§ n. 163. *L. 4. n. 164.

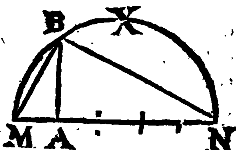
Lemme IV.

165. *Le quarré de la* AF, *ou de* FB, *ou de* GE, *ou de* GC *lignes égales, est la cinquiéme partie de celui du diametre* AC *ou* MN. (Même fig.)

Soit $AF = b$; donc $AB = 2b$, & $BC = b$, le quarré de *AB* est $4bb$, & celui de *BC* est bb. Or ces deux quarrez qui sont $5bb$, sont égaux à celui de *AC* ou de *MN** ; ainsi il vaut cinq fois celui de *AF*. *L. 4. n. 78.

Lemme V.

166. *Trouver une ligne dont le quarré soit la cinquiéme partie de celui de* MN, *diametre de* X *cercle donné.*



AM est la cinquiéme partie de *MN*, le quarré de *MN* peut cinq fois celui de *MB** ; ainsi *MB* sera la ligne que l'on cherchoit, c'est-à-dire, égale à *AF* de la figure précedente, puisque le quarré de *AF* est la cinquiéme partie de *MN**. *L. 4. n. 63. *§ n. 165.

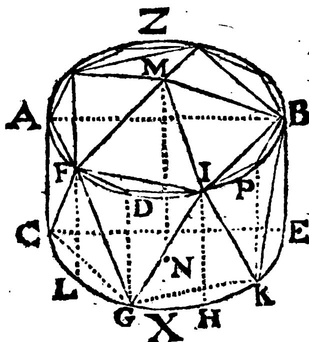
Probleme V.

167. MN *diametre d'une sphere étant donné, faire un* icosaëdre. Eucl. XIII. Prop. 16.

1°. Ayant trouvé la valeur de *AF*. (*Voyez la figure du Lemme 2. p. préced.*) & l'ayant coupé par la moitié : du centre *D* je fais *DF* & *DG* égales à cette moitié. de sorte que $FG = AF$, après je mene *AB* & *CE*, qui coupent *MN* à angles droits,

2°. Prenant *AB* & *CE* pour diametres, je fais deux cercles que je nomme Z & X, qui sont paralles. (*Voyez la figure suivante,*) étant sur des plans qu'on suppose paralleles.

3°. J'inscris dans chacun de ces deux cercles un pentagone, & de chaque angle je mene des lignes droites à *M* & à *N* extrémités du diametre de la sphere; ce qui fait cinq triangles, dont les côtez sont



égaux chacun au côté du pentagone inscrit dans ces deux cercles, par le Lemme troisiéme; ainsi tous les côtez de ces triangles étant tous égaux aux côtez des pentagones, forment deux angles solides sur les cercles Z & X chacun de cinq triangles équilateraux, dont le sommet est aux extremitez *M* & *N* du diametre de la sphere, & voilà déja dix faces trouvées de l'*icosaëdre*.

On n'a pas jugé à propos de marquer l'angle solide ni ses côtez dont le sommet est N, *de peur de rendre la figure confuse; il y faut suppléer par la pensée.*

4°. J'inscris encore dans ces mêmes cercles Z & X un decagone, dont je joins les angles qui se répondent dans X & Z par les lignes *BE*, *PK*, *IH*, *DG*, *FL*, &c. qui par l'hypothese seront toutes égales aux rayons de Z & de X.

5°. Je mene les diagonales *BK*, *KI*, *IG*,

GF, &c. Les quarrez BP, côté du decagone, avec celui de PK, qui est égal au rayon de Z & de X, sont égaux à celui de BK* : donc BK est le côté du pentagone inscrit dans X & dans Z*. La même chose se démontre de KI, de IG, de GF, &c. les triangles BKI, KIG, IGF, &c. ont pour base les côtez dudit pentagone; ils sont donc équilateraux entr'eux : & aux dix qui composent les deux angles solides, dont nous avons parlé ci-dessus : par consequent il y a entre Z & X dix de ces triangles, dont cinq ont leurs bases sur Z, & les cinq autres sur X, lesquels avec les dix déja trouvez font les vingt triangles égaux & équilateraux qui doivent composer l'*icosaëdre* ; ce qu'il falloit faire. *L. 4. n. 78. *L. 4. n. 164.

COROLLAIRE I.

Le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du rayon du cercle X ou Z, qui est la base d'un angle solide fait de cinq équilateraux. 168.

Cela a été démontré dans ce Theorême, & ailleurs*. *T. n. 165.

COROLLAIRE II.

Le diametre MN *est composé du côté de l'exagone, ou du rayon des cercles* Z *&* X, *& de deux côtez du decagone inscrit dans ces cercles.* 169.

Cela a été démontré dans ce Theorême, & ci-devant*. *T. n. 165.

COROLLAIRE III.

*Les côtez des triangles de l'*icosaëdre *sont égaux, aux côtez des pentagones inscrits dans* Z *ou* X. 170.

THEOREME XI.

171. *Les côtez de l'*icosaëdre *sont incommensurables, tant en eux-mêmes qu'en puissance, avec le diamettre de la sphere où l'*icosaëdre *est inscrit.* Euclid. XIII. Prop. 16.

Le quarré du rayon des cercles qu'on décrit pour faire l'*icosaëdre*, est la cinquiéme partie de celui du diametre de la sphere*. Soit ce quarré

*§ n. 168.

bb, partant celui du diametre de la sphere est 5*bb*. Ces deux quarrez sont donc commensurables, étant comme 1 à 5. Soit *x* côté des triangles qui font l'*icosaëdre*, lequel *x* est un des côtez d'un pentagone inscrit dans un cercle dont *b* est le rayon*, partant *bb* & *xx* quarrez du côté du pentagone dont *b* est le rayon, sont incommensurables, aussi bien que leurs racines *x* & *b**. Et puisque le quarré *bb* du rayon est commmensurable avec le quarré du diametre de la sphere, il faut que *xx* soit incommensurable avec le quarré de ce diametre; car s'il étoit commensurable avec lui, il le seroit* avec celui de *b*; & si *xx* & le quarré du diametre sont incommensurables, *x* & le diametre le sont aussi, puisque les raisons des quarrez sont doublées de celles de leurs racines, & qu'ainsi si les doublées sont sourdes, il faut que les composantes le soient aussi : car le produit de deux nombres est un nombre.

*§ n. 170.

*L. 4. n. 570.

*L. 4. n. 213.

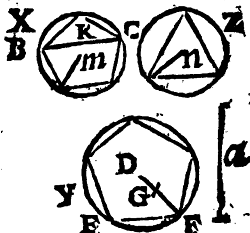
THEOREME XII.

172. *Le même cercle comprend le pentagone qui est une des faces du* dodecaëdre, *& le triangle équilateral qui est une des faces de l'*icosaëdre.

Eucl. XIV. Prop. 3.

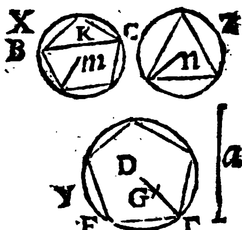
X & Z soient deux cercles, dans lesquels

ſuppoſé que le pentagone de X eſt une des faces d'un *dodecaëdre*, & le triangle équilateral de Z une des faces de l'*icoſaëdre*, ces deux corps inſcrits dans une même ſphere dont le diametre eſt a. Il faut prouver que m, rayon de X, eſt égal à n rayon de Z.



Je fais le pentagone Y dont chaque côté eſt égal au côté de l'équilateral, face de l'*icoſaëdre*. Ce pentagone eſt ainſi la baſe de cinq des triangles de l'*icoſaëdre* *. Je coupe DF, rayon de Y, au point G en moyenne & extrême raiſon. DG la plus grande partie eſt le côté du decagone *. Soit pareillement coupé BC en moyenne & extrême raiſon au point K, la plus grande partie BK ſera égale au côté de ce pentagone * : donc $BC . DF :: BK . DG$ *; ainſi $\overline{BC}^2 . \overline{DF}^2 :: \overline{BK}^2 . \overline{DG}^2$ *; & $3\overline{BC}^2 . 5\overline{DF}^2 :: 3\overline{BK}^2 . 5\overline{DG}^2$. * Or BC eſt égal au côté de l'*exhaëdre* *, dont trois quarrez ſont égaux à aa, quarré du diametre de la ſphere dans laquelle il eſt inſcrit *. Et $5\overline{DF}^2$ eſt auſſi égal à aa * : donc $3\overline{BC}^2 = 5\overline{DF}^2$. Ainſi dans la proportion ci-deſſus, y ayant égalité entre $3\overline{BC}^2$ & $5\overline{DF}^2$, il y aura auſſi égalité entre $3\overline{BK}^2$ & $5\overline{DG}^2$: donc puiſque $\overline{FE}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{DG}^2$ * : donc $5\overline{FE}^2 = 5\overline{DF}^2 + 5\overline{DG}^2$: donc auſſi $5\overline{FE}^2 = 3\overline{BC}^2 + 3\overline{BK}^2$: car on vient de faire voir $3\overline{BC}^2 = 5\overline{DF}^2$, & $3\overline{BK}^2 = 5\overline{DG}^2$.

* §n. 130.
* L. 4. n. 151.
* L. 4. n. 153.
* L. 4. n. 67.
* L. 5. n. 84.
* L. 5. n. 54.
* §n. 160.
* §n. 151.
* §n. 168.
* L. 4. n. 164.



Mais $\overline{3BC}^2 + \overline{3BK}^2 = 15mm$ *, & $\overline{5FE}^2 = 15nn$ * : car *FE* est supposé égal au côté du triangle équilateral dont *n* est le rayon, & par consequent puisque $15mm = \overline{3BC}^2 + \overline{3BK}^2 = \overline{5FE}^2 = 15nn$. Donc $15mm = 15nn$; ou $mm = nn$, & consequemment $m = n$; ce qu'il falloit prouver.

* L. 4. n. 165.
* L. 4. n. 146.

PROBLEME VI.

173. *Le diametre d'une sphere étant donné, trouver les côtez des cinq corps reguliers qui y sont inscrits.* Eucl. XIII. Prop. 18.

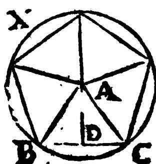
Il faut faire ce qui a été enseigné pour trouver le rapport de chaque côté des corps reguliers avec le diametre de la sphere où ils sont inscrits.

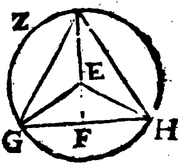
THEOREME XIII.

174. *La surface du* dodecaëdre *est égale à trente fois le rectangle fait d'un des côtez du pentagone une de ses faces & de l'apothême de ce pentagone & celle de l'*icosaëdre *à trente fois le rectangle fait d'un des côtez de l'équilateral une de ses faces, & de l'apothême de ce triangle.* Eucl. XIV. Prop. 4.

Ayant mené des lignes du centre du pentagone & de l'équilateral à leurs angles, X sera partagé en cinq rriangles, & Z en trois; ainsi les douze faces du *dedocaëdre* en soixante trian-

gles, comme les vingt faces de l'*icosaëdre* en soixante. Or chacun de ces triangles,





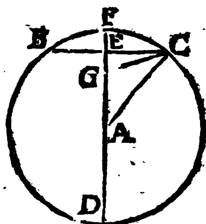
comme *ABC*, est égal au rectangle de *AD* apothéme, & de *BD* moitié de *BC*, comme aussi *GEH* au rectangle de *EF* par *GF* moitié de *GH**: Donc, &c. * *L.* 2: *n.* 35.

COROLLAIRE.

175. *La surface du* dodecaëdre *est donc à celle de l'*icosaëdre, *comme* AD × BD *est à* EF × FG.

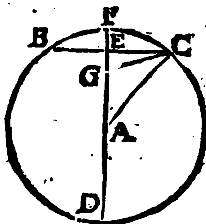
LEMME VI.

176. *L'apothême du pentagone est égal à la moitié d'une ligne égale au côté de l'exagone & du decagone inscrit dans le même cercle.* Euclid. XIV. Prop. 1.



BC est le côté d'un pentagone, par consequent *FC* côté de la moitié de l'arc *BFC*, est le côté du decagone, & *AC* rayon du cercle côté de l'exagone. *AE* est l'apothême du pentagone. Il faut prouver que *AE* est égal à la moitié de *AC* + *CF*. Je fais *GE* égale à *EF*; & partant *GC* = *FC**. * *L.* 1. *n.* 58.

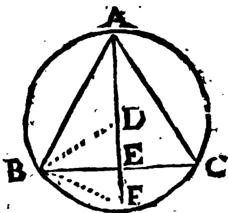
1°. *FC* étant la dixiéme partie du cercle de l'angle *FAC*, est de trente-six; & puisque l'arc *CD* vaut quatre fois cent trente-six degrez, donc l'angle *CFD* est de soixante-douze double de



* L. 2. n. 59. trente-six *. Puisque $GC = CF$: donc FCG est isocelle, donc l'angle FGC sera aussi de soixante-douze degrez : donc CGA est de cent huit *. Ajoûtez GAC de trente-six, celà sera cent quarante-quatre que j'ôte de cent quatre-vingt, reste trente-six valeur de ACG, qui est ainsi égal à GAC ; par consequent $AG = GC = FC$: donc $AG = FC$. Ainsi $AG + GE = FC + FE$, ou $AE = FC + FE$: Donc $AE + EF + FC$ est le double de AE : donc AE est la moitié de $AE + EF$ (ou AF rayon) $+ FC$; & par consequent moitié du côté de l'exagone, & de FC côté du décagone.

* L. 2. n. 57.

Lemme VII.



177. ABC *est un équilateral*, AE *une perpendiculaire qui coupe* BC : *je dis que* DE = EF.

BF est côté de l'exagone, ainsi égal au rayon BD ; donc $DE = EF$ *.

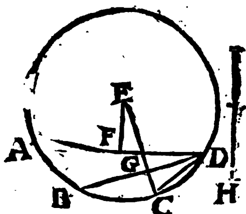
* L. 1. n. 61.

Theoreme XIV.

178. *La surface du* dodecaëdre *est à celle de l'*icosaëdre, *comme le côté du cube est au côté de l'*icosaëdre, *inscrits en une même sphere.* Eucl. XIV. Prop. 5.

AD est le côté du triangle face de l'*icosaëdre* ; & BD est le côté du triangle face du *dodecaë-*

dre qu'un même cercle peut comprendre*. *EF* coupe par la moitié *AD*, comme *EC* coupe par la moitié *BD*; & par conſequent l'arc *BCD**: donc *CD* eſt la corde du decagone. *H* eſt le côté d'un cube inſcriptible en la même ſphere. *§n.172. *L.1.n.92.

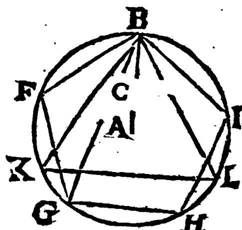


1°. ∺ *EC* + *CD*. *EC*. *CD* *. Or *EG* eſt la moitié de *EC* + *CD* *, & *EF* la moitié de *EC* *, comme auſſi *EG* — *EF* moitié de *CD*: car 2*EG* = *EC* + *CD**, & 2*EF* = *EC** : donc 2*EG* = 2*EF* + *CD*. Otant de part & d'autre 2*EF*, vient 2*EG* — 2*EF* = *CD*: donc *EG* — *EF* eſt moitié de *CD*. On a vû que ∺ *EC* + *CD*. *EC*. *CD*: donc leurs moitiez ſont en même raiſon; ainſi ∺ *EG*. *EF*. *EG* — *EF*. Mais la ligne *H* étant le côté du cube, ſi on la coupe en moyenne & extrême raiſon, *BD* ſera ſon plus grand ſegment*. Ainſi ∺ *H*. *BD*. *H* — *BD*. Donc *H*. *BD* : : *EG*. *EF**. Donc *H* × *EF* = *BD* × *EG*. Or *H*. *AD* : : *H* × *EF*. *AD* × *EF**. Donc *H*. *AD* : : *BD* × *EG*. *AD* × *EF*; c'eſt à dire, comme *H* côté du cube eſt à *AD* côté de l'*icoſaëdre*, de même *BD* × *EG* eſt à *AD* × *EF*; mais ces deux produits ſont entr'eux en même proportion que les ſurfaces du *dodecaëdre* & de l'*icoſaëdre**: donc &c. Ce qu'il falloit démontrer. *L.4.n.154. *§n.176. *§n.177. *§n.176. *§n.177. *§n.160 & L.4.n.153. *L.4.n.67. *L.4.n.75. *§n.173.

THEOREME XV.

178. *AB rayon étant coupé en C en moyenne & extrême raiſon, & AC le plus grand ſegment, le quarré de BG côté du cube, ſera à celui de*

BK *côté de l'*icoſaëdre, *comme* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *eſt à* $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Eucl. XIV. Prop. 6.



Soit *BFGHI* un pentagone une des faces du *dodecaëdre*, & *BKL* un triangle face de l'*icoſaëdre*;
* Sn. 172. ce qui eſt poſſible *. *BG* eſt le côté du *cube* inſcrit dans
* Sn. 160. une même ſphere * :
* L. 4. n. 146. donc $\overline{BK}^2 = 3\overline{AB}^2$ *.
* L. 4. n. 70. Or $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = 3\overline{AC}^2$ * : donc $\overline{BK}^2$ eſt triple de $\overline{AB}^2$, comme $\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ eſt triple de $\overline{AC}^2$. Ainſi $\overline{BK}^2 . \overline{AB}^2 :: \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 . \overline{AC}^2$. *Permutando* $\overline{BK}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 :: \overline{AB}^2 . \overline{AC}^2$. Or *BF* eſt le plus grand ſegment de *BG* côté
Sn. 160. du cube coupé en moyenne & extrême raiſon *:
* L. 4. n. 67. Donc $\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 :: \overline{BG}^2 . \overline{BF}^2$ *, $:: \overline{BK}^2, \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$ *. *Permutando* $\overline{BG}^2 . \overline{BK}^2 :: \overline{BF}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$.
* L. 3. n. 53. Or $\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *. *AB* & *AC*
* L. 4. n. 164. étant côtez de l'exagone & du decagone *. Mettant $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ en la place de $\overline{BF}^2$, nous au-
* L. 4. n. 351. rons $\overline{BG}^2 . \overline{BK}^2 :: \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 . \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2$; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XVI.

180. *Comme le côté du* cube *eſt au côté de l'*icoſaëdre, *ainſi le* dodecaëdre, *eſt à l'*icoſaëdre *inſcrits dans une même ſphere*. Eucl. XIV. Prop. 7.

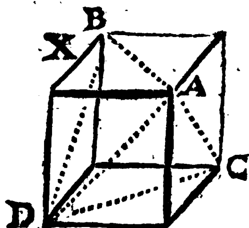
Concevez que de tous les angles d'un *dodecaëdre*, & de même de l'*icoſaëdre*, on ait mené

des lignes au centre de la sphere. Cela sera dans l'un douze pyramides, & dans l'autre vingt qui seront de même hauteur, puisque le même cercle dans la sphere comprend une des faces de l'*icosaëdre* & du *dodecaëdre* *; ainsi ces pyramides * font comme leurs bases, * c'est-à-dire, comme * les surfaces de ces deux poliédres. Or ces surfaces sont entr'elles * comme le côté du *cube* au * côté de l'*icosaëdre*.

* §n.172. * §n.123. * §n.198.

PROBLEME VII.

Inscrire un tetraëdre *dans un* cube. Euclid. XV. Prop. 1. 181



De *A* un des angles du cube *X*, concevant qu'on ait mené les diagonales *AB*, *AC*, *AD*, & *BD*, *BC*, *CD*, vous appercevrez *ABCD* un *tetraëdre* ou pyramide de quatre triangles équilateraux, car les diagonales sont égales; ainsi le triangle *ABC* = *BAD*, &c.

*Il faut avoir à la main les corps reguliers dont on parle; Il est facile de les faire selon qu'on l'a enseigné *. Tout ce qu'on va lire sera aisé, faisant sur chaque corps ce qu'on dit ici qu'il y faut faire; autrement les démonstrations suivantes seront obscures.*

* §n.144.

PROBLEME VIII.

Inscrire un octaëdre *dans une pyramide ou* tetraëdre, Eucl. XV. Prop. 2. 182

Coupez par la moitié tous les six côtez de la pyramide ou tetraëdre ; joignez les points de section par douze lignes qui seront toutes égales, & feront huit triangles équilateraux.

PROBLEME IX.

183. *Dans un cube faire un* octaëdre. Eucl. XV. Prop. 3.

Ayant pris le centre de chaque face de cube, il faut joindre ces centres en tirant des lignes autant qu'il en faut ; sçavoir douze, qui étant toutes égales feront huit triangles égaux, & par consequent un *octaëdre*.

PROBLEME X.

184. *Dans un* octaëdre *faire un* cube. Eucl. XV. Prop. 4.

1°. Coupez par la moitié toutes les côtez de l'*octaëdre*. 2°. Menez des lignes par toutes ces sections sur les faces de ce corps, ces lignes seront toutes égales, & feront deux quarrez opposez, lesquels joignant par quatre autres lignes qui seront égales aux premieres, & les opposées étant paralleles elles feront un cube ; ce qui est évident.

PROBLEME XI.

185. *Faire un* dodecaëdre *dans un* icosaëdre. Eucl. XV. Prop. 5.

Cinq triangles de l'*icosaëdre* qui font un angle solide ou une pyramide, ont pour base un pentagone *. Il faut couper tous les côtez de cet-
Sn.167. te pyramide par la moitié le plan de cette section, sera un pentagone & une des faces du *dodecaëdre* ; car en faisant la même chose à tous

les angles solides ou pyramides de l'*icosaëdre* qui sont au nombre de douze, on aura douze pentagones égaux, qui feront les douze faces du *dodecaëdre*.

Avertissement.

Le diametre de la sphere étant supposé 1000, les côtez des corps reguliers inscrits dedans, seront à peu près comme les nombres suivans.

Le *Tetraëdre*	816
L'*Octaëdre*	707
L'*Exaëdre* ou *Cube*	577
L'*Icosaëdre*	527
Le *Dodecaëdre*	357





ELEMENS
DE
GEOMETRIE
OU
DE LA MESURE
DE L'E'TENDUE.



LIVRE SIXIE'ME.

De la Methode.

AVERTISSEMENT.



LA Methode que nous avons suivie jusqu'à present, ç'a été de considerer l'idée des choses dont nous parlions, & d'en tirer leurs proprietez. Par exemple, quand il s'est agi de démontrer les proprietez du cercle, nous avons consideré quelle étoit la figure à qui on donnoit ce nom; comment elle se faisoit; ce qu'elle étoit: & c'est de l'idée de cette figure, que nous avons déduit ses

proprietez. Cette methode suppose la chose connuë. Ces Elemens m'étoient connus avant que de les écrire ; & ce que j'ay fait, ç'a été de faire appercevoir dans l'idée des choses, ce qui y est, & ce que j'y avois vû. Il y a une autre methode avec laquelle on trouve ce qu'on ne connoissoit pas, & que j'ay employée moi-même dans ces Elemens en beaucoup d'occasions, pour trouver ce que je ne sçavois point ; c'est pourquoi on l'appelle Methode d'Invention, *au lieu que la premiere se peut nommer* Methode de Doctrine. *Cette seconde est tres-générale ; & proprement elle ne suppose aucune connoissance. J'en ai déja parlé dans les Elemens des Mathematiques ; mais je l'applique ici à la Geometrie, & je la traite d'une maniere particuliere ; ainsi ce qu'on va voir n'est point une répetition inutile.*

CHAPITRE PREMIER.

De la methode qu'il faut suivre dans l'examen d'une Question, ou Problême. En premier lieu il la faut bien concevoir, & l'exprimer nettement.

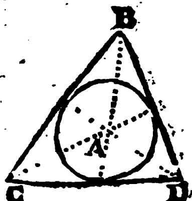
CE n'est que par l'application de l'esprit qu'on atteint la verité : On se distrait facilement. Pour remedier à ce défaut, il faut arrêter son esprit, exprimant par une figure ce qu'il doit considerer ; ce qui n'est pas impossible, quoiqu'on ne connoisse pas entierement les choses qui sont en question. Il faut bien qu'on ne les ignore pas entierement ; autrement, si elles n'avoient aucune prise, ce seroit en vain qu'on les attaqueroit. Or ce peu de connoissan-

ce donne lieu de ſupoſer, que ſelon qu'on le propoſe, elles doivent être faites de telle & telle maniere. On peut donc tirer certaines lignes conformément à cette ſuppoſition. Ces lignes, puiſque l'on les tire telles qu'elles doivent être, ſont connuës; &, comme on le va voir, elles peuvent faire connoître celles qu'on cherche. La premiere choſe qu'on doit faire, c'eſt de bien exprimer ce qui eſt en queſtion, & qu'on veut connoître. L'importance, c'eſt que cette expreſſion ſoit nette, qu'on y voye ce qu'il faut chercher, & qu'elle ſoit débaraſſée de ce qui ne ſerviroit qu'à la rendre obſcure. Cela ſe comprendra mieux dans les exemples ſuivans, où l'on va voir que la ſeule expreſſion réſout ſouvent des queſtions difficiles. J'entens ici les expreſſions qui ſe font par des figures, auſſi-bien que par des diſcours.

QUESTION.

Démontrer que la ſurface d'un triangle eſt égale à la moitié de la ſomme de ſes trois côtez, multipliez par le rayon d'un cercle qui lui eſt inſcrit.

La ſeule vûë de cette figure démontre, que cela eſt veritable. Des angles du triangle *BCD* ayant mené des lignes au centre *A* du cercle qui lui eſt inſcrit, on fait les trois triangles *BAC*, *CAD*, *DAD* égaux enſemble au triangle *BCD*, & qui ont pour hauteur le rayon de ce cercle. Ils ſont donc égaux à un triangle, dont la baſe



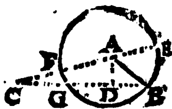
est égale aux trois côtez de *BCD*, & qui a pour hauteur le rayon du cercle inscrit* ; la surface de ce triangle est donc égale au produit de la moitié de sa base par sa hauteur ; ce qu'il falloit prouver. *L. 2. n. 143.

Voyons encore par un autre exemple, combien la maniere d'exprimer une question par une figure convenable, en facilite la resolution.

QUESTION.

Démontrer que dans le triangle ABC, *si de l'angle* CAB *on mene une perpendiculaire sur* BC, *la somme des deux côtez* AB *&* AC *est à* BC, *base de l'angle que ces deux côtez comprennent, comme la difference de* CD *&* BD *est à celle de* AC *&* AB. 52

Pour trouver la démonstration de ce Theorême, & l'exprimer d'une maniere qui facilite l'invention, de *A* comme centre, & de l'intervalle *AB* le plus petit côté ; je fais un cercle ; Et puisque *AB* est égal à *AE*, la ligne *CE* est la somme des côtez *AC* & *AB*. Les lignes *AF* & *AB* sont égales ; donc *CF* est leur difference. Puisqu'aussi $DB = DG$, la ligne *GC* sera la difference entre *CD* & *DB*. Ainsi voilà une expression, ou une figure, qui marque ce que l'on cherche. Après quoi la question se résoud facilement ; car $CE \times CF = CB \times CG$* : donc *CE. CB : : CG. CF** ; ce qu'il falloit démontrer.



*L. 4. n. 57.
*L. 3. n. 58.

CHAPITRE II.

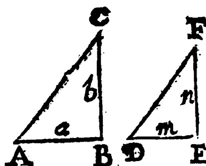
On peut exprimer les lignes & toutes les grandeurs, dont il est parlé dans une question, & faire sur elles toutes les operations de l'Arithmetique, sans les connoître.

CEtte methode, que nous enseignons ici, est fort générale, & fort differente de celle qu'on a suivie jusqu'à present. Nous recherchions les proprietez de quelque figure ; & il s'agissoit de la maniere qu'on pouvoit trouver ses proprietez, & les démontrer. Ici on ne considere autre chose dans les Grandeurs qu'on examine, sinon qu'on les peut ajoûter à d'autres grandeurs, ou les rétrancher si elles sont petites : qu'on les peut multiplier, ou diviser. On a enseigné dans le troisiéme Livre, comment cela se peut faire de tout ce qui est grand, c'est à dire, capable du plus ou du moins, soit lignes, soit nombres. Ainsi cette methode est déja expliquée en partie, & nous en avons fait un usage par tout. Si on a lû les Livres précedens, on ne peut donc ignorer que par $a + b$, on peut entendre deux lignes a & b ajoûtées ensembles ; par $a - b$ qu'on a rétranché b de a ; par ab qu'on a multiplié a par b ou b par a ; qu'ainsi ab est un rectangle, dont les lignes a & b sont les côtez ; que aa ou a^2 est un quarré, dont la ligne a est un des côtez ; que $\frac{ab}{b}$ est un rectangle, ou plan divisé par b, après laquelle division il ne reste que le côté a, c'est-à-dire, que ce n'est plus qu'une ligne, suivant ce qu'on a enseigné au

mencement du Livre troisiéme, qu'on peut effacer la lettre qui est au-dessus & au-dessous du signe de la division; qu'ainsi $\frac{ab}{b} = a$.

Les puissances s'expriment de même, aussi-bien par lettres que par lignes; ainsi on marque par lettres les rapports des figures; car si un triangle est rectangle, dont l'hypothenuse est a & les deux côtez b & c, suivant qu'on l'a enseigné*, ou* $aa = bb + cc$, ou $a^2 = b^2 + c^2$, & $a^2 - b^2 = c^2$, & $a^2 - c^2 = b^2$. 5. * L. 2. n. 142. * L. 4. n. 78.

Tous les rapports des triangles semblables se peuvent exprimer de même par lettre. car si ABC & DEF sont semblables, que $AB = a$, & $BC = b$, & $DE = m$, & $EF = n$; alors $a.\ b :: m.\ n$: Et puisque, selon ce qui a été dit*, multipliant b par m, & divisant le produit bm par le premier terme a, le quotient $\frac{bm}{a}$ est le quatriéme: donc $EF = \frac{bm}{a}$, & par le même raisonnement $\frac{bm}{n} = AB$. Ce qui donne le moyen de marquer les rapports des lignes, aussi-bien que des nombres. 6. * L. 3. n. 60.



Cette maniere générale d'exprimer toute grandeur, & de faire sur elle les operations qu'on fait sur les nombres, est ce qu'on appelle l'Algebre, comme nous l'avons dit*. Elle est difficile à ceux qui n'ont pas coûtume de s'en servir; ce qui n'arrivera pas à ceux qui se sont servis de nos Elemens. Remarquez que dans la 7. * L. 1. Sect. 1.

multiplication l'on peut réduire un produit à une proportion : par exemple le produit de *a* par *b*, à une proportion dont le premier terme soit l'unité ; le second & le troisiéme soient les deux grandeurs *a* & *b*, qui se multiplient ; & le quatriéme terme soit *ab*, qui est le produit de la multiplication, ce qui est évident : car, soit ce quatriéme terme nommé x : donc 1. *a*

* L. 3. n. 50. : : *b*. *x*. Or $\frac{ab}{1} = x$*. Mais l'unité ne divisant point, comme ne multipliant point : donc $\frac{ab}{1} = ab$, & partant $ab = x$. Par tout où l'unité n'est point, on la peut supposer, puisqu'elle n'apporte aucun changement. Ainsi le produit de trois lettres, comme *abc*, peut marquer ces deux proportions :

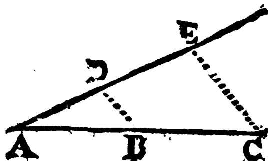
1. *c* : : *ab*. *abc* ; & 1. *ab* : : *c*. *abc*. Cela fait voir que le produit de quatre lignes *abcd*, marque trois proportions ; le produit de cinq lignes *abcde*, marque quatre proportions ; & dans ces proportions le produit total n'est qu'une ligne, qui résulte de toutes ces proportions, lorsque le premier terme est l'unité ; car puisque

1. *a* . : *b*. *ab* ; donc 1. *b* : : *a*. *ab*.
De même, puisque 1. *ab* : : *c*. *abc* ;
Donc 1. *c* : : *ab*. *abc*.

Le quotient d'une division exprime une ligne ; par exemple $\frac{a}{b}$: car cela se peut réduire à cette proportion *b*. *a* : : 1. *x*. : car $\frac{a\,1}{b}$ ou $\frac{a}{b} = x$.

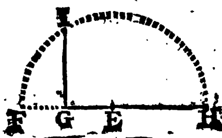
8. Il est facile de faire toutes les operations de l'Arithmetique, avec le compas & la regle. On

peut ajoûter une ligne à une autre ligne, ou retrancher une plus petite d'une plus grande. Pour la multiplication d'une ligne par une ligne, c'est-à-dire, pour trouver une ligne qui soit égale au produit de deux lignes, voilà ce qu'il faut faire. Soient ces deux lignes *AD* & *AC* qu'on veut multiplier l'une par l'autre; il faut prendre sur *AC* la ligne *AB* égale à l'unité, & mener une ligne *AD* qui fasse un angle à discretion avec *AB*. Je tire une ligne par *D* & *B*, & une autre par *C* qui lui soit parallele; ce qui étant fait, *AE* sera la ligne que l'on cherche : car *AB*. *AD* :: *AC*. *AE* : donc $AB \times AE = AD \times AC$. La multiplication n'augmente pas une grandeur, qui n'est multipliée que par l'unité, c'est-à-dire, qui n'est prise qu'une fois; Ainsi comme *AB* est l'unité, en multipliant *AE*, elle ne l'augmente point. Donc *AE* qui est une quatriéme proportionnelle, sera égale au produit de *AD* par *AC*; ce que l'on cherchoit.

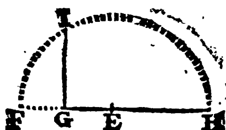


Si l'on veut diviser *AE* par *AC*, ayant pris *AB* égale à l'unité, & mené par *B* une parallele à *CE*, on aura *AD* qui sera la valeur de *AE* divisée par *AC*; car *AB*. *AD* :: *AC*. *AE*, & l'unité est au quotient d'une division, comme le diviseur est à la grandeur divisée. 9

S'il faut tirer la racine quarrée de *GH*, je lui ajoûte une ligne droite *FG* qui soit l'unité, & divisant *FH* 10



en deux parties égales au point *E* : du centre *E* je fais le cercle *FIH* : élevant ensuite du point *G* une ligne droite jusqu'à *I* à angles droits



sur *FH*, la ligne *GI* est la racine que l'on cherche : car ÷ *FG*. *GI*. *GH*. Donc le quarré de *GI*, est égal au produit de *GH*. Or. *FG* étant l'unité, elle n'augmente point la valeur de *GH* en la multipliant ; ainsi *GH* est égale au quarré de *GI*, qui par consequent est la racine de *GH*. Par ce même moyen on peut trouver une ligne, qui soit égale à la racine quarrée d'un nombre qui n'est pas quarré ; par exemple qui soit égale à la racine d'un quarré qui vaut 18 : car prenant *GH* égale à 18, & lui ajoûtant *FG* égale à l'unité ; & de *E* milieu de cette ligne, comme centre faisant un cercle, la ligne *GI* sera égale à la racine quarrée de 18, qui ne peut être exprimée par aucun nombre, comme nous l'avons vû dans le quatriéme Livre.

Chapitre III.

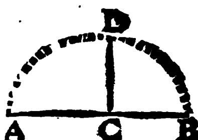
II. *Après avoir exprimé une Question ou Problême, & fais la figure qui lui convient, il faut distinguer ce qui y est connu d'avec ce qui ne l'est pas ; & considerer si le Problême est déterminé, ou indéterminé.*

Après qu'on a conçû nettement une Question ou un Problême, & fait la figure qui en exprime les conditions, il faut distinguer ces trois trois choses, 1°. Les lignes qui sont connuës,

2°. Celles qui ne le sont pas. 3°. Tous les rapports que ces lignes connuës & inconnuës peuvent avoir entr'elles. Une partie des lignes qu'on tire pour exprimer le Problême sont connuës, les autres sont supposées, c'est-à-dire, qu'on suppose qu'elles doivent avoir tels & tels rapports avec les lignes qui sont connuës. Or aujourd'hui c'est la coûtume de marquer, par les premieres lettres de l'Alphabet, les lignes qui sont connuës, les nommant ou *a*, ou *b*, ou *c*, ainsi de suite. On marque avec les dernieres *x*, *y*, *z*, celles qui sont inconnuës : quelquefois il est bon de se servir des premieres lettres du nom des grandeurs connuës & inconnuës ; par exemple marquant un nombre par *n*, une somme par *s*, le temps par *t*, la vîtesse par *v*. Ensuite il faut considerer si de la maniere que le Problême est proposé, il dépend de la volonté de choisir certaines grandeurs, tirer certaines lignes, ou si toutes celles que la question renferme, sont déterminées, de sorte que tout ce que l'on peut faire, soit de leur donner des noms convenables. Il faut donc examiner d'abord si la Question est déterminée, ou indéterminée. Dans une Question indéterminée, on n'y apperçoit point de rapport, qui donne le moyen d'exprimer en deux manieres les grandeurs inconnuës. Car qu'est-ce qui fait que je puis appeller la même grandeur ou x, ou $y + a$? C'est que je sçai que x est égal à y, après lui avoir ajoûté a ; que $x = y + a$. C'est là un rapport déterminé.

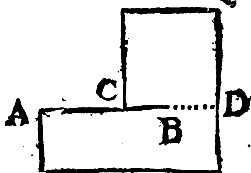
Mais quand, sans en déterminer aucun, on propose par exemple de couper le diametre *AB*, de sorte que le rectangle des deux parties soit égal à un quarré, ce Problême est indéterminé ; 124

& je ne puis trouver une double expression, qu'en supposant un certain rapport; celui-ci par exemple, que *A B* est coupé en *C*. Après cela, de l'intervalle de la moitié de *A B* ayant fait un cercle, & élevé sur *C* la perpendiculaire *CD*, j'aurai ce que je cherche ÷ *AC. CD. CB* * : donc $AC \times CB = \overline{CD}^2$ *. Un Problême indéterminé peut avoir plusieurs resolutions; car en quelque part du diametre que soit *C*, le quarré de *CD* sera égal au rectangle des parties du diametre coupé comme on avoit proposé de le faire. Je pouvois couper *A B* ailleurs qu'en *C*.



* L. 4. n. 29.
* L. 3. n. 57.

33. Un Problême est dit déterminé, lorsqu'on n'y peut satisfaire qu'en observant certaine chose qui le détermine, & qui ne dépend pas du choix de celui à qui il est proposé, c'est-à-dire, que les grandeurs qu'il renferme, ont un certain rapport qui leur est particulier. Par exemple, *AB* étant divisé en *C*; on propose de prolonger *AB* jusqu'en *D*, point inconnu; de sorte que le quarré de *C D* soit égal au rectangle de *AD* & de *B D* : alors comme ce prolongement *BD* est déterminé, c'est-à-dire, qu'il a une certaine longueur précise; ce Problême est déterminé : Et supposé que *AC*=*a*, & *CB*=*b*, & *BD*=*x*, on aura cette double expression, sçavoir pour le rectangle $ax + bx + xx$, & pour le quarré $bb + 2xb + xx$; lesquels



lesquelles deux grandeurs suivant la supposition doivent être égales; ainsi $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$, au moyen de laquelle on pourra connoître la valeur de x, suivant qu'il sera enseigné.

CHAPITRE IV.

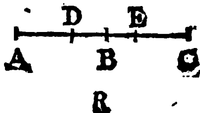
La connoissance des rapports qui sont entre les lignes de la figure d'un Problême, donne le moyen de les égaler ou de trouver de doubles expressions ; ce qui s'appelle Equation. 14

SI on sçait que trois lignes connuës, a, b, c sont en proportion, & que x inconnuë est le quatriéme terme de cette proportion ; qu'ainsi $a . b :: c . x$ *, alors puisque $\frac{bc}{a} = x$ on a cette double expression $\frac{bc}{a}$ & x de la même grandeur, & c'est ce qu'on appelle *Equation*. Trouver des Equations, c'est trouver de doubles expressions d'une grandeur inconnuë; ce qui se peut, quand on connoît quelqu'un de ses rapports avec les grandeurs connuës.

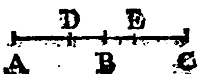
* L. 3. n. 60.

15 Si on sçait que la somme de a & de b est égale à l'inconnuë x, cette expression $a + b = x$ sera une équation. Il est évident que *la moitié de deux lignes inégales moins la moitié de leur difference, est égale à la plus petite ligne ; & cette même moitié, plus la moitié de leur difference, est égale à la plus grande ligne.*

Soit la ligne $AC = x + z$, $AD = x$, & $DC = Z$ Soit DE leur difference, dont BD est



la moitié. Soit $AB = y$ & $DE = 2a$; ainsi DB ou $BE = a$. Il est clair que $AB - DB$, ou $y - a = AD$ ou x, & que $BC + BD$ ou $y + a = DC$ ou z. Ainsi lorsqu'on connoît la difference de deux grandeurs inconnuës, on a le moyen de les exprimer de deux manieres.



16. Quand il s'agit de Problêmes de Geometrie, les seules figures font souvent appercevoir le rapport des lignes, dont il est parlé par le Problême : car si par exemple je sçai que l'inconnuë x est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtez sont d & b, je sçai que

* L. 4. n. 79. $xx = bb + dd$ *; ainsi voilà une double expression de x. Un plan est fait de la multiplication de ses deux racines ; si on le divise donc par l'une, le quotient de la division sera l'autre. Ainsi si $b . c :: d . x$, puisque $bx = cd$ divisant cd par b, le quotient $\frac{cd}{b} = x$. Si x étoit moyenne proportionnelle entre c & d, alors $xx = cd$.

Les figures ou leurs proprietez, qu'on découvre aisément quand on sçait les élemens, & ces proprietez connuës, donnent les moyens de trouver des Equations.

17. Ce qu'on a vû dans le troisiéme Livre touchant les Puissances, est aussi une source de differentes Equations : car si je sçai que $a + b = x$, donc $aa + 2ab + bb = xx$ *. Si x est

* L. 3. n. 20. l'hypothenuse d'un triangle, & que les deux côtez soient a & b, alors $aa + bb = xx$; partant $xx - aa = bb$, ou $xx - bb = aa$.

18. On peut exprimer differemment les mêmes grandeurs, marquant les parties pour le tout,

ou le tout pour les parties ; ou les puissances pour les racines, ou les racines pour les puissances ; car si $a + b = x$, donc * $aa + 2ab + bb = xx$; ou $aa + 2ab = xx - bb$, ou $aa + bb = xx - 2ab$. Il est évident qu'on peut trouver une infinité d'équations en cette maniere : * L. 3. n. 20.

Si $ab = xx$; donc $\sqrt{ab} = x$.

Ainsi en ajoûtant, retranchant, multipliant, divisant on trouve le moyen d'égaler des grandeurs, d'en trouver de doubles expressions ou équations, en quoi consiste principalement l'art de cette methode que nous enseignons ici, & qui se nomme Analyse, c'est à-dire, methode de *resolution*, parce qu'on taille ou coupe, pour ainsi dire, la grandeur qu'on cherche : on lui ajoûte, on lui retranche, on la multiplie, on la divise, on la résout jusqu'à ce qu'elle se trouve précisément égale à une grandeur connuë, après quoi elle n'est plus inconnuë. 19.

CHAPITRE V.

Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de lignes inconnuës, & réduire toutes ces Equations à une seule. 20.

CE qu'on cherche dans une Question, dans un Problême, & généralement lorsqu'on veut connoître ce qu'on ne connoît pas encore ; c'est de ramener, pour ainsi dire, l'inconnu à ce qui est connu : comparer l'un avec l'autre, & remarquer leur difference, c'est-à-dire, ce qui fait que l'un est plus grand que l'autre ; & qu'ainsi on découvre ce qu'il faut leur ajoûter, ou en retrancher pour les égaler ; ce qu'on con-

noît auſſi quand on ſçait préciſément quelle eſt leur raiſon : car ſi x eſt le tiers de a, donc $x = \frac{a}{3}$. Si c'eſt a qui eſt le tiers de x, donc $3a = x$.

81. On peut de cette maniere trouver les doubles expreſſions de toutes les grandeurs, dont il eſt parlé dans le Problême, c'eſt-à dire, trouver des Equations ; & il en faut chercher autant qu'il y a de grandeurs inconnuë. Il y a toûjours dans un Problême une principale ligne inconnuë, qui eſt celle dont dépend la réſolution du Problême : & c'eſt à cette Equation qu'il faut réduire toutes les autres, de ſorte qu'il n'y ait plus qu'une ſeule lettre inconnuë ; car ſi on ſçait que $x + b = z$, ou que $z - b = x$, partant où ſeront ces deux inconnuës je pourrai toûjours ſubſtituer $x + b$ en la place de z, ou $z - b$ en la place de x, & par conſequent réduire la Queſtion à des termes où il n'y ait qu'une ſeule inconnuë. Il y a differentes methodes. Quand on connoit que l'inconnuë eſt le troiſiéme ou le quatriéme terme d'une proportion, on la peut exprimer avec les lettres des grandeurs connuës ; car ſi $\div a. b. x$;

* L. 3. n. 60. donc $\frac{bb}{a} = x$*. Si $a. b :: c. x$; donc $\frac{bc}{a} = x$.

Les termes d'une progreſſion ſe peuvent exprimer de maniere, qu'on n'employe que la même lettre. Si j'avois cette progreſſion de quatre termes exprimées par quatre differentes lettres $\div b. z. x. y$, je les pourrois réduire d'une maniere qu'il n'y eût qu'une lettre inconnuë ; car ſuppoſant que b eſt égal à 1, je pourrois dire que $\div 1. z. zz. zzz.$ 1°. * b ou 1 eſt à x, comme

* L. 3. n. 79. le quarré de b ou 1 eſt à celui de z ; c'eſt-à-dire, $b, x :: bb, zz$, ou $1, x :: 1, zz$; ainſi puiſque

zz = *x*, je puis ſubſtituer *zz* à la place de *x*. De même *b* ou 1 eſt à *y*, comme *bbb* ou 1 eſt à *zzz* *. Donc puiſque *zzz* = *y*, au lieu de *y* je place *zzz*; ainſi je réduis ces quatre grandeurs *b*, *z*, *x*, *y* à celles ci, 1, *z*, *zz*, *zzz*. Il y a une infinité de manieres ſemblables. Ce ſont des methodes, chacun en peut trouver de plus heureuſes; ce qui lui donne lieu de réſoudre facilement des Problêmes, qui ſont tres-difficiles à ceux qui ne connoiſſent pas la methode; car tout le ſecret conſiſte à rendre les Equations nettes & ſimples.

* L. 3. n. 87.

CHAPITRE VI.

Il faut réduire les termes d'une Equation à l'expreſſion la plus ſimple, & faire enſorte que la grandeur inconnuë ſe trouve ſeule dans l'un des membres de l'Equation. 22.

Lorſqu'on a fait enſorte que la grandeur inconnuë ſe trouve dans un des membres de l'Equation, c'eſt-à-dire, d'un côté du ſigne de l'égalité, & que de l'autre côté il n'y a que des grandeurs connuës; la grandeur inconnuë ſe trouve préciſément égale à des grandeurs connuës, la Queſtion eſt entierement réſoluë. Si *x* = *a* + *b*, l'on ne peut ignorer la valeur de *x*. Or pour arriver là, il faut faire paſſer d'un côté ce qui eſt connu, & ſe délivrer de ce qui eſt inconnu. Avant toutes choſes, on doit réduire les Equations à des expreſſions ſimples. Ces réductions ſe font par l'Addition, ou par la Souſtraction, ou par la Multiplication, ou par la Diviſion, ou enfin par l'Extraction des racines. Le

principe de tout cela, c'est qu'ajoûtant aux deux membres d'une Equation, ou retranchant également, l'Equation où l'égalité demeure; comme aussi multipliant ou divisant ces deux membres par une même grandeur, ils demeurent égaux,
* L. 3. n. 54. & 55. comme on l'a prouvé*. Puisque deux puissances égales ont des raisons égales, il est clair qu'en prenant les racines de deux membres, leur égalité doit subsister.

23. On a fait voir l'utilité des réductions dans les Elemens de Mathematiques. Voyons-en ici quelques exemples. Si $x-5=15$, ajoûtant 5 de part & d'autre, viendra cette Equation plus simple $x=20$. Si au contraire $x+5=20$, en retranchant 5 de part & d'autre, on aura $x=15$. Si $z-a=b-a$, ajoûtant a de part & d'autre, vient $z=b$. De même, si $z+a=b+a$, retranchant a de part & d'autre, vient $z=b$. Si on a cette Equation $\frac{x}{3}=b$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, vient $z=3b$, Comme au contraire, si on avoit $bx=3b$, divisant l'un & l'autre membre par b, on auroit $x=3$, Si $xx=25$, en prenant la racine quarrée, viendra $x=5$. Au contraire, si on avoit $\sqrt{z}=5$, c'est-à dire, si la racine quarrée de z est égale à 5, en élevant ces deux membres à une une même puissance, ou en prenant leur quarré, on a cette équation $z=25$. Si on avoit $xx=ab$, on pourroit mettre $x=\sqrt{ab}$.

24. Ce Theorême, que le quarré de l'hypothenuse est égale aux quarrez des deux autres côtez, donne le moyen de réduire une équation à une expression plus simple : Car par exemple, ayant cette expression $aa-bb$, & voulant

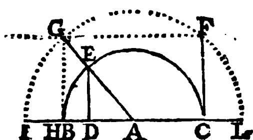
trouver un quarré égal à $aa - bb$, je n'ay qu'à prendre la moitié de a, & du milieu ou de cette moitié, comme rayon faire un cercle ; ou ayant pris une corde égale à b, menant de son extrémité une ligne à l'autre extrémité de a, qui est le diametre du cercle, j'ay un triangle rectangle dont a est l'hypothenuse, & b un des côtez : je nomme c le troisiéme qui est connu ; donc $aa = cc + bb$: ôtant bb de part & d'autre, vient $aa - bb = cc$; ainsi je puis mettre cc en la place de $aa - bb$, & par consequent avoir une expression plus simple. Ainsi si j'avois $cc + bb$, joignant ensemble c & b de maniere que ces deux lignes fissent un angle droit ; & achevant le triangle, le troisiéme côté seroit l'hypothenuse contenuë. Cette hypothenuse ayant donc été nommée a, il est évident que $aa = cc + bb$. Au lieu de $cc + bb$, je puis donc substituer aa, expression plus simple.

On peut trouver un quarré égal à un plan donné ; pour cela les deux côtez ou racines de ce plan étant b & d, il faut trouver un moyen proportionnel entre b & d *. Soit c moyen proportionnel ; alors $bd = cc$ *. Ainsi je puis transformer le plan bd dans le quarré cc, c'est-à-dire, mettre l'un pour l'autre. 25.

* L. 4. n. 29.
* L. 3. n. 57.

Un quarré étant donné, on peut trouver un autre quarré qui en soit telle partie qu'on souhaitera, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou le cinquiéme, &c. Soit le quarré aa, il en faut trouver un autre qui soit le quart de aa. Je prens une ligne au hazard, sur laquelle je marque cinq parties égaes avec la même ouverture du compas. Soit cette ligne BC, dont BD est une de ces cinq parties ; ainsi DC vaut 26.

quatre de ces parties. De *A* milieu de *BC*, & de l'intervalle de *AB* ou *AC* je fais un cercle; & sur *D* j'élevé la perpendiculaire *DE*, qui se termine



à la circonference de ce cercle. Alors ÷ *BD*.

* L. 4. n. 29. *DE*. *DC**. Si *BD* se nomme *b*, donc $DC = 4b$; & si $DE = x$, donc ÷ *b*. *x*. 4*b*; partant $xx = 4bb$.

Sur *C* j'éleve *CF*, une perpendiculaire égale à *a* racine, ou côté du quarré *aa* dont on cherche la quatriéme partie qui soit un quarré. Je mene *FG* une parallele à *BC*; & par le point *G*, où elle coupe le rayon *AE* prolongé à l'infini, j'abaisse une perpendiculaire sur *BC* prolongé de part & d'autre à l'infini. Cette perpendiculaire *GH* est égale à *CF*, & par consequent

* L. 1. n. 64. à *a**. Je fais un cercle de l'intervalle de *AG*, dont le diametre est *IL*; il est évident que *IH* est telle partie de *IL* que *BD* est de *BC*; par consequent une cinquiéme partie: ainsi si *IH* se nomme *m*, le reste du diametre *HL* sera 4*m*.

* L. 4. n. 29. Or ÷ *IH*. *HG*. *HL*, ou ÷ *m*. *a*. 4*m**: donc

* L. 3. n. 57. $aa = 4mm$*. La ligne *IH* sera par consequent le côté ou racine d'un quarré, quatriéme partie du quarré *a*.

27. Ce seul exemple fait comprendre comme on peut trouver un quarré qui soit telle partie qu'il sera requis d'un quarré donné; ce qui est tres-utile pour réduire une équation à une expression plus simple; car dans celle-ci $5bx + nn = 5xx$, en divisant ces deux membres par 5; & pour cela trouvant le quarré *oo* cinquiéme partie de

an ; je la réduirai à cette expression beaucoup plus simple $bx + oo = xx$. On voit ce qu'il faut faire.

Quand il est question de trouver un quarré plus grand ou deux fois, ou trois fois que celui qui est proposé, on voit ce qu'il faut faire.

Il y a une infinité de moyens de réduire les expressions composées à de plus simples & plus nettes : après quoi il ne s'agit plus que de faire évanoüir d'une équation certaines grandeurs embarassantes ; ce qui se peut, ajoûtant cette équation avec une autre, dans laquelle se trouvent ces mêmes grandeurs avec un signe contraire ; selon ce principe, que plus & moins une grandeur, ce n'est rien. Ainsi, si $x = d - b$ & $x = d + b$; pour faire évanoüir b, j'ajoûte ces deux équations dans une équation $x + x = 2d$, où b ne paroît plus. Il est facile de faire passer une grandeur d'un des membres d'une équation dans l'autre membre ; car dans celle-ci $x - b = d$; ajoûtant b de part & d'autre, on aura $x = d + b$ où b se trouve dans le second membre. 28.

Quoiqu'on ne connoisse point les racines d'une équation, c'est-à-dire, les grandeurs de la multiplication desquelles une équation est faite, on peut les augmenter ou les diminuer selon qu'on le juge à propos. Comme si $xx = xd + bb$ dont les racines sont $x + d$, b, x, & qu'on veüille augmenter x de 3, il faut prendre la grandeur y qu'on suppose égale à $x + 3$. Ainsi $y - 3 = x$. Ensuite par tout où sera x mettre $y - 3$; & par tout où se trouvera le quarré ou le cube *&c.* de x, faut mettre le quarré ou cube *&c*, de $y - 3$; après quoi l'équation $xx = xd + bb$ sera transformée en celle-ci, 29.

$yy - 6y + 9 = yd - 3d + bb$ qui eſt la même. En augmentant ou diminuant une équation, il faut faire enſorte qu'il y ait des ſignes contraires ; & qu'ainſi on puiſſe faire évanoüir les grandeurs dont on veut délivrer une équation. On en verra des exemples

CHAPITRE VII.

30. *Les Equations ſont d'une ou de pluſieurs dimenſions ou degrez ; & ce ſont des degrez qui diſtinguent les Problêmes.*

SElon que la queſtion eſt propoſée, on fait monter les grandeues inconnuës à un degré plus élevé. Lorſque la grandeur inconnuë à laquelle on a réduit les autres n'eſt point multipliée ; comme en cette équation $x = d + c$, on dit que cette équation eſt ſimple ou d'une dimenſion. Nous avons vû que lorſqu'il y a pluſieurs grandeurs inconnuës, on les réduit toutes à une ſeule. Si par exemple on avoit x & z, & qu'on ſçût que leur difference fût b ; ſi x étoit la plus petite, alors $z - b = x$; ainſi au lieu de z on peut mettre $x + b$. Par conſequent ſi, ſelon que la queſtion eſt propoſée, on ſçavoit que le rectangle de x & de z, ou de x & de $x + b$ eſt égal au quarré de c, on auroit cette équation $xx + xb = cc$, qu'on réduit en ôtant xb de part & d'autre, à celle-ci $xx = cc - xb$, où x eſt élevé au ſecond degré. S'il y avoit eu trois grandeurs inconnuës dans la queſtion, & qu'elles euſſent dû être multipliées les unes par les autres ; x à laquelle on auroit réduit toutes les autres, ſeroit montée au troiſiéme degré. Ainſi on voit que les équations ſont d'une ou de plu-

sieurs dimensions, ou de plusieurs degrez. Je ne parlerai pas davantage ici des équations qui ont plus de deux degrez, parce qu'on ne les peut pas résoudre avec le compas & la régle, c'est-à-dire, en n'employant que le cercle & la ligne droite.

On réduit les équations de deux dimensions à ces formules $xx = aa - xd$, ou $xx = aa + xd$, & $xx = xd - aa$. Car si $xx = ab - xd$, comme ab est une grandeur connuë, en prenant $ab = cc$ *, $xx = cc + xd$. Si $xx = xd + c$, je puis trouver un quarré bb égal à la grandeur c, ainsi que $xx = bb + xd$, je cherche une moyenne proportionnelle entre l'unité, & c, laquelle étant nommée b, il faut que $bb = 1c$, ou $bb = c$; puisque une grandeur multipliée par l'unité ne devient pas plus grande après cette multiplication, comme on l'a déja dit. 31. * n. 25.

C'est une faute considérable en cette matiére, de ne pas réduire à un degré inferieur ce qui y peut être réduit. On fait cette faute, lorsqu'entre les grandeurs inconnuës d'une question, on ne cherche pas des équations qui conduisent à un degré plus simple. 32.

C'est pour résoudre quelque Problême qu'on cherche des équations, & qu'on tâche de les réduire. La nature de l'équation donne le nom au Problême qu'elle résout.

Quand dans la resolution, l'équation après avoir été réduite, n'a qu'une dimension, comme si $x = b$ ou $x = \frac{ab}{c}$, cette équation est du premier degré, & le Problême est simple.

Lorsqu'on trouve une équation où l'inconnuë a deux dimensions, comme $xx = aa + bb$ qui est une équation du second degré, le Problême est nommé *Plan*.

33. Lorsque l'on trouve une équation élevée au troisiéme ou quatriéme degré, comme $x^3 = aab$ ou $x^4 = a^3b$, qui sont des équations du troisiéme ou du quatriéme degré, le Problême est nommé *Solide.*

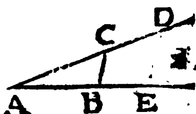
Lorsqu'on vient à une équation où l'inconnuë est élevée au delà du quatriéme degré, le Problême étoit nommé *Linéaire* par les Anciens; mais il est plus naturel de le nommer par le degré auquel l'inconnuë est élevée.

CHAPITRE VIII.

34. *De la construction & effection Geometrique des Equations, c'est-à-dire, de la maniere d'exprimer avec des Lignes les Quantiez qui s'y rencontrent.*

ON appelle construction ou effection Geometrique d'une équation, les expressions qu'on fait en lignes des grandeurs connuës & inconnuës d'une équation. La construction des équations d'un degré est facile, puisqu'il ne s'agit que de faire une ligne égale à une grandeur connuë. Comme si $x = a$, que a soit d'un pied, il est facile avec la regle & le compas de tirer une ligne d'un pied. Quand le membre connu d'une équation auroit plusieurs grandeurs, comme $a = a + b$, la chose seroit aisée; car on peut réduire l'équation à une expression plus simple, prenant une grandeur égale à ces deux grandeurs. On peut prendre deux differentes lignes, & les joindre. Quelquefois on ne cherche pas la valeur d'une grandeur, mais celle de son quotient, divisée par d'autres grandeurs; par exemple $x = \frac{ab}{c}$; pour exprimer cela Geome-

triquement, c'est-à-dire, construire ou faire une figure qui exprime cette équation, il faut remarquer que ces lettres marquent des grandeurs proportionnelles entr'elles; car si $c.\ a :: b.\ x$, la seconde a étant multipliée par la troisiéme b, & leur produit ab divisé par c la premiere, le quotient de la division $\frac{ab}{c}$ sera x le quatriéme proportionnelle; ainsi $x = \frac{ab}{c}$. Pour exprimer cela geometriquement, ayant pris AB égale c, & AE égal à b, sur B j'éleve BC que je fais égale à a, & de A par C je mene une ligne; ensuite sur E j'éleve une paralléle à BC ou à a, que je nomme x. Ces quatre lignes $AB.\ BC :: AE.\ x$ sont proportionnelles; ainsi $\frac{BC \times AE}{AB}$, ou $\frac{ab}{c} = x$.

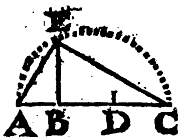


De même pour exprimer geometriquement $\frac{aa + ab}{c + d} = x$, comme ces grandeurs connuës se peuvent réduire à cette proportion $c + d.\ a + b :: a.\ \frac{aa + ab}{c + d}$ ou x, la même figure exprime cette équation; trois lignes étant données on trouve une quatriéme proportionnelle, qui est la valeur de x. 3[illegible]

Lorsque les grandeurs connuës d'une équation ont un signe radical, on peut de même l'exprimer geometriquement. Si par exemple, *fig. suiv.* $x = \sqrt{ab}$, en tirant AB une ligne égale 3[illegible]

à a, & la prolongeant jusques à C, de sorte que $BC = b$, & du milieu de AC comme centre faisant un cercle, la perpendiculaire BE sera la valeur de x; car $\div AB.BE\ BC$, ou $\div a.x.c$; ainsi $ab = xx$: donc $\sqrt{ab} = x$.

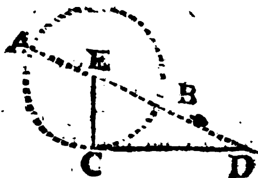
37. On peut aussi faire la construction de cette équation $x = \frac{bb}{a-b}$, & l'exprimer en cette maniere. AD étant pris égal à a, & AB à $a-b$; ainsi BD étant égal à b, j'élevé sur B une perpendiculaire égale à BD ou b, je mene de A à E une ligne droite; & sur AE au point E une perpendiculaire, sçavoir EC qui coupe le prolongement de AD : Alors l'angle CEA est droit; ainsi ayant décrit



un cercle par les trois points A, E, C, il est évident que $\div AB.BE.BG$, ou que $\div a-b.b.x$, j'appelle x la valeur de BC. Donc bb divisé par $a-b$ est égal à x*; ainsi $\frac{bb}{a-b} = x$.

*L. 3. n. 60.

38. La construction des équations de deux degrez, est pareillement facile. Les équations de deux degrez ou de deux dimensions se réduisent, comme nous l'avons vû à ces formules, $xx = ax + bb$, ou $xx = ax - bb$, ou $xx = bb - ax$.



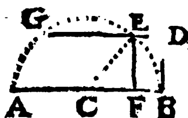
1°. Pour faire la construction de $xx = ax + bb$, ou $xx = bb - ax$. Sur CD une ligne droite, que je suppose égale à b, j'éleve CE une per-

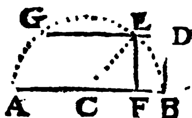
pendiculaire que je suppose égale à la moitié de a, & de l'intervalle de cette moitié, comme rayon, je fais un cercle, & je mene par E son centre la ligne DE. Puisque CE est la moitié de a, donc $AB = a$. Soit $BD = y$, & $AD = x$. donc $a + y = x$; donc * $ax + xy = xx$. Or puisque CD ou b est une tangente, donc * $\div x . b . y$; donc * $xy = bb$. Ainsi dans cette équation $xx = ax + xy$, substituant bb en la place de xy, qui est la même chose, on aura cette équation $xx = ax + bb$, dont on a fait ainsi la construction.

* L. 3. n. 18.
* L. 4. n. 33.
* L. 3. n. 57.

2°. Pour faire la construction de cette équation $xx = bb - xa$, on fait la même chose. On 397 suppose CD (*même figure*) égale à b, & CE égale à la moitié de a; mais on suppose que BD est égale à x. Alors $\div AD$ ou $a + x . CD$ ou $b . BD$ ou x : donc $ax + xx = bb$. En ôtant de part & d'autre ax, viendra $xx = bb - ax$, qui est l'équation dont il falloit former la construction.

3°. La construction de cette équation $xx =$ 403 $ax - bb$, se fait ainsi. Soit AB égale à a, de l'intervalle BC moitié de AB je fais un cercle; j'éleve sur B la perpendiculaire BD égale à b; je mene par D la ligne DG parallele à AB. Si cette parallele ne coupe pas le cercle, parce que b est égale ou plus grande que le rayon du cercle égal à la moitié de a, c'est une preuve que xx n'est pas égal à $ax - bb$, puisque b est trop grand au regard de x. Soit donc b plus petit que BC, ainsi DG, coupe le cercle en E, par consequent EF que je suppose perpendiculaire, est égale





* L. 1. n. 65. à BD*. Je nomme x la ligne AF, & y la ligne FB. * L. 4. n. 49. Il est évident* que $\div$ AF. ou x. FE ou b. FB ou y. * L. 3. n. 57. Ainsi $\div$ $x.\ b.\ y$: donc* $xy = bb$. Or on a supposé AF ou x, plus FB ou y égal à a ; donc $x + y = a$. En multipliant cette équation par x, on a cette équation $xx + xy = ax$, plaçant bb en la place de xy qui est la même chose, comme on vient de voir, on a $xx + bb = ax$; & retranchant bb de part & d'autre, on aura $xx = ax - bb$. Ainsi on a fait la construction de cette équation.

41\. Par le moyen de cette construction on trouve en ligne la valeur de la grandeur inconnuë ; ce qui se trouve encore plus facilement en réduisant dans une progression de trois termes, les trois formules precedentes. 1°. Cette équation $xx = ax + bb$ se réduit à cette progression * L. 3. n. 58. $\div$ $x - a.\ b.\ x$; car $xx - ax = bb$*, ajoûtant ax de part & d'autre, on a l'équation dont il s'agit, $xx = ax + bb$.

42\. 2°. Cette équation $xx = ax - bb$ se réduit à cette progression $\div$ $x.\ b.\ a - x$ Car $ax -$ * L. 3. n. 57. $xx = bb$*, ajoûtant xx de part & d'autre, on a $ax = bb + xx$; ôtant bb de part & d'autre, on a $ax - bb = xx$, qui est l'équation dont il est question.

43\. 3°. Cette équation $xx = bb - ax$, se réduit à cette progression $\div$ $x + a.\ b.\ x$; car * L. 3. n. 57. $xx + ax = bb$*, ôtant de part & d'autre ax, on a cette équation $xx = bb - ax$ dont il s'agissoit.

Dans ces trois progressions, b le terme moyen est connu ; & dans la premiere & dans la trois-

ſiéme, on connoît la difference des extrêmes qui eſt dans la premiere — *a*, & dans la troiſiéme + *a*. Dans la ſeconde, on connoît la ſomme de deux extrêmes. Avec cela, comme on le va voir dans les trois Problémes ſuivans, on peut connoître tous les termes de ces progreſſions.

PROBLEME I.

Soit cette progreſſion de trois lignes ∺ z. b. x. 44.
On connoît la moyenne b, *& que* a *eſt égal à la ſomme de* x *& de* z *les extrêmes, connoître les extrêmes.*

Je prens *AB* égal à *a*, ſomme des extrêmes. De *C*, milieu de *AB* comme centre, & de l'intervalle *AC* ou *CB* je fais un cercle. Sur *B* j'éleve perpendiculairement *BD* égale à la moyenne *b*; & par le ſommet *D* je mene *DG* (*même figure que ci-deſſus*) parallele à *AB*, & de *E* où *DG* coupe le cercle, j'abaiſſe *FE* une perpendiculaire ſur *AB*, qui eſt égale à *BD*, ainſi *EF* = *b*; donc puiſque ∺ *AF*. *EF*. *FB*. les extrêmes ſeront *AF* & *FB*; ainſi ſi *z* eſt le grand extrême, *FB* qui eſt le petit extrême, ſera égal à *x*.

PROBLEME II.

Soit cette progreſſion de trois lignes ∺ x + d. b. x, *ou* ∺ x — d. b. x, *la moyenne* b *eſt connuë, & la difference des extrêmes* x + d *&* x, *connoître la valeur de* x. 45.

Je fais *AB* égale à *d*; & ſur *B* j'éleve perpendiculairement *BD* égale à *b*, enſuite de *C* moitié de *AB*, & de l'intervalle *CD* je fais un cercle. Je prolonge *AB*





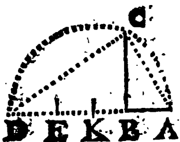
de part & d'autre jusqu'à la circonference du cercle, après quoi *AE* ou *BF* = *x*, car ÷ *x* + *d*. *b*. *x*.

Si la progression est ÷ *x* — *d*. *b*. *x*, il faut faire la même chose, mais en ce cas où *x* = *EB*, le plus petit terme est *BF* égal à *EB* — *AB*, ou à *x* — *d*. Il est évident que la difference de *x* — *d*. & de *x* est *d*. Quand le signe est +, la grandeur *x* est *EA* à laquelle on ajoûte la difference *d*, pour avoir le plus grand extrême. Quand le signe est —, on retranche *d* de *EB* ou *FA* qui est la valeur de *x*.

PROBLÊME III.

46. *Soit cette progression de trois lignes* ÷ d + x. b. d, *la moyenne* b *étant connuë, connoître la difference des extrêmes* d + x & d, *laquelle est* x.

Sur *B* extrêmité de *AB* égale à *d*, j'éleve perpendiculairement *BC* égale à *b*, par *A* & *C* je mene une ligne droite sur laquelle au point *C* je fais une perpendiculaire qui est *CD*; ainsi l'angle *ACD* est droit. Je prolonge *AB* jusqu'à ce qu'elle coupe *CD*, la ligne *BD*, après en avoir ôté *AB*, sera égale à *x*; car ayant coupé *AD* par la moitié au point *K*, & de l'intervalle *AK* ou *KD* fait un cercle, ce cercle passera par *C*; ainsi ÷ *AB* ou *d*. *BC* ou *b*. *BD*, partant *BD* = *d* + *x* qui est le troisiéme terme; ayant donc retranché de *BD* la ligne *DE* égale à *AB*, le reste sera égal *x* dont on cherchoit la valeur.



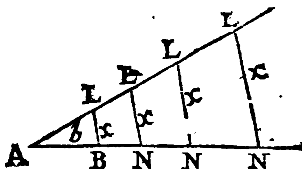
CHAPITRE IX.

De la construction ou effection Geometrique, qui est un Lieu, Qu'est-ce que ce Lieu? Quand est-ce qu'un Problême est un Lieu? Distinction des Problêmes selon cette consideration. 47.

DAns les constructions ou effections Geometriques des Equations on cherche ordinairement une ligne droite ou courbe, ou une superficie, dont tous les points ayent un même rapport aux points d'une même ligne droite à l'égard de l'un de ses points. Une ligne droite, une ligne courbe, une superficie ne sont pas distinguées des points, par lesquels elles partent; ainsi par un lieu Geometrique il faut entendre le passage, ou les points, par lesquels passe la grandeur qu'on cherche. Une construction ou effection Geometrique est donc un lieu, si ce n'est pas seulement un point qu'on propose de trouver, mais une suite de plusieurs points, qui comparez avec un certain point & une certaine ligne droite, ayent entr'eux les mêmes rapports. Et alors l'équation, qui exprime ces rapports, s'appelle un Lieu; & le Problême qu'on entreprend de résoudre, est aussi un Lieu. Il y a plusieurs sortes de lignes; il y a aussi plusieurs sortes de lieux des cercles, des lignes droites & courbes de differentes especes. On dit ainsi d'un Problême, qui est un Lieu, que c'est ou à la ligne droite, ou au cercle, ou à quelque espece de ligne courbe.

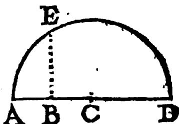
Les Problêmes, qui sont indéterminez, sont des Lieux; car ils peuvent avoir plusieurs differentes résolutions. Voyons-en des exemples; & comme toutes les résolutions s'expriment par une 48.

seule Equation, commençons par un lieu qui soit une ligne. La ligne *LL* en sera un, si l'on peut mener de tous les points les lignes *LN*, *LN* paralleles, qui rencontrent une ligne droite *AN*; & ayant pris sur la ligne *AN* un point *A* à volonté, chaque ligne *LN* a un même rapport à la partie *AN*, qu'elle fait par sa rencontre. Par exemple, si la ligne *LL* est droite, & qu'elle rencontre la ligne droite *AN* en *A*, il est évident que chaque ligne droite *LN* a un même rapport à chaque partie *AN*; ce qui se peut exprimer par cette équation $y = \frac{bx}{a}$. Si je suppose que le rapport proposé est comme de a à b, & que les lignes indéterminées soient $BL = x$, & $NN = y$: car puisque $a . b :: x . y$; donc le produit de b par x, qui est bx divisé par a, sera la valeur de y; ainsi $y = \frac{bx}{a}$. Cette équation marque que ce lieu est une ligne; car il n'y a qu'elle qui ait cette proprieté, que toutes les lignes qu'on tirera de *AL* sur *AN*, seront toutes à *AN* comme a est à b; ainsi vous voyez que le Problême où il s'agit de trouver *LL* est un lieu; qu'ainsi ce Problême est indéterminé, étant capable de differentes résolutions; & ce lieu ne peut être qu'une ligne droite : car il n'y a que celle dont *LL* occupe la place, qui ait les proprietez de la ligne droite.



49 Un Problême est un lieu à un cercle, & il est indéterminé, quand on propose de trouver une

ligne dont le quarré soit égal à un plan ; car alors il faut de néceſſité ſuppoſer des grandeurs connuës, comme par exemple que les côtez du plan ſont a & b ; que $AB = a$, & $BD = b$. $AD = a + b$, & $AC = CD$.



Sur C comme centre je fais un cercle, & ſur B la perpendiculaire BE, alors $\div AB . BE . BD$; donc $ab = \overline{BE}^2$; ainſi ſi $BE = x$, donc $ab = xx$ ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problême eſt indéterminé : car quelque raiſon que je ſuppoſe entre les parties de AD, le quarré de la ligne qui tombera perpendiculairement entre les deux points A & D, aura toûjours ſon quarré égal au plan des parties de AD, c'eſt-à-dire, que $ab = xx$, ou $\frac{ab}{x} = x$. Ce Problême peut donc avoir une infinité de réſolutions. Voyez que pour trouver une équation, il a fallu ſuppoſer des lignes connuës AB & BD, autrement on ne l'auroit pû finir.

Il n'y a que le cercle, qui dans toutes ſes parties ait toûjours cette équation.

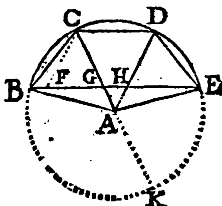
C'eſt ainſi que par les équations on connoît la nature de toute ligne droite & courbe, pourvû qu'elle ſe puiſſe faire par un mouvement régulier & uniforme. C'eſt à connoître la nature des lignes courbes, que ſert la doctrine des lieux ; ainſi c'eſt une matiere qui ne nous regarde pas.



CHAPITRE X.

50. *On ne peut exprimer Geometriquement avec la regle & le compas, que les équations simples, ou qui ne sont que de deux degrez. on ne peut donc pas avec la connoissance de ces Elemens, résoudre les Problêmes solides.*

ON vient de voir comment on peut résoudre avec le compas & la regle, c'est-à-dire, en tirant les lignes droites & faisant des cercles, les équations qui sont d'un ou de deux degrez. Cela ne se peut pas, quand elles en ont davantage. Voyons-le dans un exemple. Le Problême de la trisection de l'angle est fameux. Un arc de cercle étant donné, on propose de le couper en trois parties égales, & par consequent trouver une troisiéme partie de l'angle proposé, dont la troisiéme portion de cet arc soit la mesure. La cordé *BE* de l'arc *BCDE* est connuë. On propose de couper cet arc en trois égales. Selon les regles de la methode, je suppose la chose faite, c'est-à-dire, que *BC* = *CD* = *DE*; je mene *CF* parallele à *DH*; ainsi *CF* = *DH* : & puisque *CG* = *DH*, partant *CF* = *CG*; ainsi le triangle *FCG* est un isocelle. Les angles *BCG* & *BGC* sont égaux; car la mesure de *BCG* est la moitié de l'arc *BK*, & celle de *BGC* est la moitié de *KE*, plus la moitié de *BC* ou de *DE* égal à *BC* *. Or



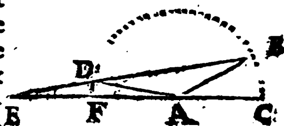
* L. 2. n. 39. & 52.

BK est égal à *KD*; donc ces deux angles qui ont même mesure sont égaux : partant le triangle *CBG* est isocelle. Il a un angle commun avec *FCG*; ces deux isocelles sont donc semblables. *BAC* est aussi isocelle, & il a un angle commun avec *CBG*, sçavoir *BCG*; ces trois triangles sont donc semblables *. * L. 2. n. 83. & L. 4. n. 8.

Ces trois triangles *BAC*, *CBG*, *FCG* étant semblables, il faut que ÷÷ *AB*. *BC*. *CG*. *GF* *, * L. 4. n. 10. donc si $AB = 1$ & $BC = z$, selon ce qui a été dit ci-dessus *, ÷÷ 1 *z*. *zz*. *zzz*, donc $FG =$ * Sn. 21. *zzz*. Je nomme *b* la ligne connuë *BE*; or $CD = FH = BC = BG = HE$, donc $BG + FG + GH + HE$ est le triple de *BC*; ainsi il ne s'en faut que la valeur de *FG* que *BE*, ou *b* ne soit triple de *BC*. Or $FG = zzz$, donc $b + zzz = 3z$, ou $zzz = 3z - b$.

Voilà jusqu'où nous pouvons pousser ici ce Problême; mais vous voyez que nous n'avons rien dans les Elemens précedens dont on puisse tirer un moyen pour connoître la grandeur inconnuë *z*, sçachant seulement que son cube *zzz* est égal à trois fois elle-même, c'est-à-dire, à 3*z*, après en avoir retranché la grandeur connuë *b*.

Ce Problême se résoud aisément par des voyes mechaniques. Soit l'arc *BC*, mesure de l'angle *BAC*, qu'il faut couper en trois. Je prolonge vers *E* le diametre *CF*, & appliquant une regle sur *B*, & sur le prolongement de *CF*, je cherche le point *D* dans le cercle tel que la ligne *AD* soit égale à *DE*; l'ayant trouvé 512



en tâtonnant, je dis que l'arc *DF* sera le tiers de *BC*, ou que *DAF* est le tiers de *BAC*; ce que je démontre.



ADE & *DAB* sont isocelles : donc *DBA* = *BDA*, & *DAE* = *DEA* : l'angle *BDA* exterieur, est égal aux deux interieurs *DEA* & *DAE*; donc *DBA* est égal à ces deux mêmes angles, & par consequent il est double de l'un & de l'autre. L'angle *BAC* exterieur est aussi égal aux deux interieurs *DEA* (ou son égal *DAF*) & à *DBA*, partant il est triple de *DAF* moitié de *DBA*; ce qu'il falloit démontrer.

J'aurois pû ajoûter plusieurs choses touchant les Equations; mais ce que j'ai dit suffit, car pour faire usage de ce qu'on en peut dire de plus, il faut avoir étudier les Elemens des lignes courbes.

CHAPITRE XI.

52. *Essais de la methode sur quelques Problêmes.*

ON peut tenter la resolution d'un Problême par deux voyes; La premiere n'est qu'une application des Elemens, qui font découvrir quelque moyen particulier au Problême dont il s'agit, & qui ne peut pas servir dans un autre. La seconde voye est l'ordre que prescrit la methode que nous enseignons ici, selon laquelle on trouve ce que l'on cherche d'une maniere d'autant plus excellente, qu'elle s'étend généralement

ſement à tout Problême. Donnons un exemple de ces deux voyes.

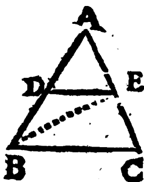
PROBLEME I.

133 BAC eſt un iſocelle, on propoſe de couper ſes côtez AB, AC par une parallele à la baſe BC; de ſorte que cette parallele ſoit égale à ce qui reſte des côtez, c'eſt-à-dire, (je ſuppoſe la choſe faite) que $DB = DE$.

Premiere maniere.

Je ſuppoſe la choſe faite, ſçavoir que $BD = DE$, donc le triangle BDE eſt iſocelle; ainſi les angles DBE, & DEB ſont égaux. Or les angles CBE & EBD ſont auſſi égaux * : partant EBC & EBD ſont égaux; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DBC. D'où je connois que dans un triangle iſocelle, tel que BAC, en diviſant en deux l'angle ABC par une ligne droite BE, & menant par E une parallele à BC, elle ſera égale à DB; ainſi par cette proprieté du triangle iſocelle, je trouve le moyen de réſoudre le Problême propoſé; mais, comme vous voyez, ce moyen eſt particulier & propre à ce ſeul Problême.

*L. 2. n. 25.



Seconde maniere.

134 Suppoſant la choſe faite, je nomme a la ligne AB qui eſt connuë, & d la baſe BC auſſi connuë, & x la grandeur inconnuë AE que l'on cherche; ainſi comme $EC = a - x$, auſſi $DE = a - x$, il eſt évident que $a. d :: x. a - x$, donc $aa - ax = dx$. J'ajoûte de part & d'au-

tre aa, & il vient $aa = dx + ax$; je suppose $c = d + a$, ainsi $cx = dx + ax$; & par consequent au lieu de $dx + ax$, mettant cx j'ai $aa = cx$; donc $\div c. a. x$: ainsi il ne s'agit que de trouver une troisiéme proportionnelle aux deux lignes connuës c & a; ce qu'on a en-
* *l.* 4. *n.* seigné *. Cette seconde maniere analytique est
83. générale, & n'est point particuliere à ce Problême.

PROBLEME II.

55. *Connoître chaque côté du triangle* ABC, *connoissant la somme de chacun de deux de ses côtez.*

Soit $AB = x$, & $AB + BC = a$, & $AB + AC = b$, & $BC + AC = c$; alors $BC = a - x$, & $AC = b - x$. Or $AC + BC = c$; donc $a - x + b - x$, ou $a + b - 2x = c$. Donc ajoûtant $2x$ de part & d'autre, on aura $a + b = c + 2x$. Otant c de part & d'autre, on aura $a + b - c = 2x$.

Ainsi pour trouver la valeur de x, il faut joindre les deux lignes a & b, retrancher du tout la ligne c; la moitié de ce qui reste sera la valeur de x.

PROBLEME III.

56. a *est un des côtez d'un triangle rectangle*, x *est l'autre côté, dont la difference avec l'hypothenuse est* b, *trouver la valeur de* b.

L'hypothenuse est $x + b$; Donc $aa + xx$
* *L.* 4. *n.* $= xx + 2bx + bb$ *. Otant xx de part &
78. d'autre; $aa = 2bx + bb$; retranchant encore bb, on aura $aa - bb = 2bx$; prenant $cc = aa$
* 3. *n.* 24. $- bb$ *, on aura $cc = 2bx$. Donc $\div 2b. c. x$; il ne s'agit donc que de trouver une troisiéme

proportionnelle aux deux grandeurs connuës $2b$ & c.

PROBLEME IV.

a est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, & b *la difference des deux côtez, trouver ces côtez.* 57.

Soit nommé x le plus petit côté : donc le plus grand est $x + b$: ainsi $aa = 2xx + 2xb + bb$. Je retranche $bb =$ de part & d'autre, & j'ay $aa - bb = 2xx + 2xb$, ou $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = xx + xb$. Je mets en la place de $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, le quarré cc que je lui trouve égal*. J'ai donc $cc =$ * 3 n. 24. $xx + bx$, ou $cc - bx = xx$; ainsi $\div x + b$. c. x. On trouvera donc la valeur de x *. * 3 n. 38. & 43.

PROBLEME V.

a est l'hypothenuse d'un triangle rectangle, & b *la somme des deux côtez, trouver ces côtez.* 58.

Soit nommé x un de ces côtez ; donc l'autre sera $b - x$: ainsi $aa = bb - 2bx + 2xx$. J'ajoûte $2bx$, ainsi $2bx + aa = bb + 2xx$. Je retranche encore bb, & j'ay $2bx + aa - bb = 2xx$, Je mets dd en la place de $aa - bb$, que j'ay trouvé égal * : donc $2bx + dd = 2xx$. * 3 n. 24. Je divise le tout par 2, pour cela je cherche cc égal à la moitié de dd * ; ainsi $bx + cc = xx$: * 3 n. 26. donc $\div x$. c. $x - b$. Je puis donc trouver la valeur de x *. * 3 n. 38. & 41.

PROBLEME VI.

aa est l'aire ou superficie d'un parallelogramme 59.

rectangle, x son petit côté, & x + b le plus grand ; on cherche ces deux côtez.

Le produit de x par $x+b$ est l'aire de ce parallelogramme ; donc $xx+xb=aa$ ainsi $\div x.\ a.\ x+b$. Ce Problême se résout par consequent comme le précedent.

PROBLEME VII.

60. *x est le plus grand côté d'un triangle rectangle : sa difference avec l'hypothenuse est a, qui est ainsi x + a. La difference de cette hypothenuse avec l'autre côté, qui est plus petite qu'elle ; est b ; ainsi ce côté est x + a — b. On cherche ces trois côtez.*

Les quarrez des deux côtez x & $x+a-b$ sont égaux à celui de l'hypothenuse, laquelle est $x+a$; ainsi $2xx+2ax-2bx-2ba+aa+bb=xx+2ax+aa$. J'ajoûte de part & d'autre $2ba$, & j'ay $2xx+2ax-2bx+aa+bb=xx+2ax+aa+2ba$. Je retranche de part & d'autre $xx+2ax+aa$; & j'ay $xx-2bx+bb=2ba$. Je retranche $+bb$, & j'ay $xx-2bx=2ba-bb$, prenant d égal à $2b$ & cc égal à $2ba-bb$, j'ay $xx-dx=cc$; ainsi $\div x.\ c.\ x-d$. Ce qui se résout aisément *.

* 3 n. 38. & 41.

PROBLEME VIII.

61. *b est la perpendiculaire tirée de l'angle droit sur l'hypothenuse d'un triangle rectangle : a est la difference des deux parties ou segmens de l'hypothenuse, trouver ces segmens.*

Soit x le plus petit segment ; donc le plus grand sera $x+a$. Or $\div x+a.\ b.\ x$ *. Donc

* L. 4. n. 28.

ce Problême se résout comme on l'a enseigné*. *3 n. 58. & 33.

PROBLEME IX.

La ligne AB *est coupée dans un de ses points,* *comme* C, *on propose de la prolonger jusqu'à* D; *desorte que le rectangle fait de* AD *& de* BD *soit égal au quarré de* CD. 64.

Je suppose la chose faite. Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $BD = x$. Il est question de trouver la valeur de BD, ou de x; je multiplie AD ou $a + b + x$ par BD, c'est-à-dire, par x, ce qui fait $ax + bx + xx$, lequel produit selon la question est égal au produit de CD ou de $b + x$ multiplié par lui-même; c'est-à-dire, que $ax + bx + xx = bb + 2bx + xx$. J'ôte des deux membres de cette équation $bx + xx$, & il reste $ax = bb + bx$; je fais passer bx de l'autre côté, afin que la grandeur connuë bb reste toute seule, & j'ay $ax - bx = bb$. Pour réduire cette equation aux plus simples termes, je la divise par $a - b$, & alors $x = \frac{bb}{a-b}$, laquelle équation se résout dans cette progression ÷ $a - b . b . x$, dont les deux premiers termes étant connus, le troisiéme que je cherchois, qui est x, me sera aussi connu; ainsi pour faire le Problême il faut prolonger la ligne AB de la grandeur x qu'on vient de connoître.



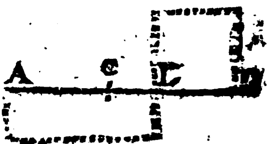
La résolution de chaque Problême, donne la connoissance d'un nouveau Theoréme : Car selon ce qui vient d'être prouvé, le quarré de BD, *prolongement d'une ligne, plus* CB *partie de*

cette ligne, est égal au rectangle fait de AD *&* *de* BD, *&* *ce prolongement est le troisiéme terme d'une progression, dont* AC — BC *est le premier terme*, & BC *le second. La plus grande partie des Theorêmes sont les fruits de l'analyse, qui comme vous voyez, est une source feconde de veritez.*

PROBLEME X.

53. *La ligne* AB *est coupée en* C. *On propose de la couper de rechef en* D; *de sorte que le rectangle de* AC + DC *par* CD, *soit égal au quarré de* DB.

Je suppose la chose faite. Il faut trouver la valeur de CD. Soit $AC = a$, & $CB = b$, & $CD = x$; ainsi $DB = b - x$. Le rectangle de CD par CB est $ax + xx$, & le quarré de DB est $bb - 2bx + xx$; donc selon la question $ax + xx = bb - 2bx + xx$. Je retranche xx de part & d'autre, & $ax = bb - 2bx$. Je fais passer $2bx$ de l'autre côté, afin que le connu soit seul, $ax + 2bx = bb$; je divise cette équation par $a + 2b$, il vient $x = \frac{bb}{a + 2b}$, je réduis cette égalité en proportion $\div a + 2b.\ b.\ x$, les deux premiers termes sont connus, donc x le sera aussi; ainsi en prenant sur CB la ligne CD égale à x, on aura fait ce qui étoit requis.

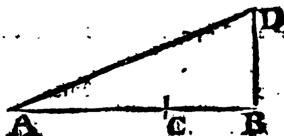


PROBLEME XI.

54. *La ligne droite* AB *est coupée en* C, *la ligne* BD *infinie est perpendiculaire sur* AB: *il faut de*

A mener AD *une ligne sur* BD, *de sorte que* AD = BC + BD.

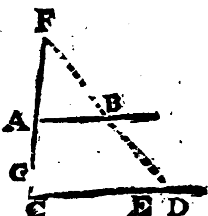
Je suppose la chose faite, & que $AB = a$ & $BC = b$, & $BD = x$ valeur que l'on cherche. Selon la question $AD = BC + BD$, partant $AD = b + x$. Or puisque l'angle *ABD* est droit, le quarré de *AD* ou de $b + x$, lequel quarré est $bb + 2bx + xx$ est egal à ceux de *AB*, & de *BD*; qui sont aa & xx. Ainsi $bb + 2bx + xx = aa + xx$; ôtant de part & d'autre xx, il vient $bb + 2bx = aa$. Afin que l'inconnu soit tout d'un côté, faisant changer de place à bb, nous aurons $2bx = aa - bb$, que je divise par $2b$, & j'ay $x = \frac{aa - bb}{2b}$, laquelle équation se réduit ainsi dans cette proportion $2b.\ a + b :: a - b.\ x$ dont les trois prémiers termes étans connus, le quatriéme x sera connu : ce que l'on cherchoit.



PROBLEME XII.

Deux lignes paralleles AB *&* CD, *sont données par position avec* CF, *comme aussi les points* F *&* E. *On propose de mener* FD *coupant* AB *&* CD *prolongées au besoin, de sorte que* AB *soit à* ED, *comme* AF *est à* AG. 511.

Soit $AF = a$, $CF = b$, $CE = c$, $AG = d$, & $AB = x$.



Nous supposons la chose faite : partant, selon l'hypothese $a. d :: x. ED$. Multipliant donc x par d, & divisant le produit qui est dx par a, le quotient $\frac{dx}{a} = ED$. Les deux triangles AFB & FCD sont semblables ; $a. x :: b. CD$. Or $CD = CE + ED$, & partant $CD = c + \frac{dx}{a}$.

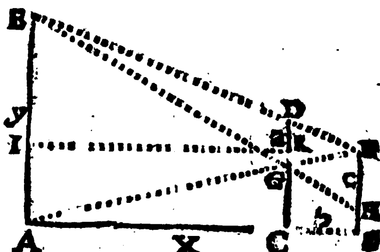
Le produit des extrêmes a & $c + \frac{dx}{a}$, qui est $ac + dx$ est égal à celui des moyens : Donc $ac + dx = bx$. Je transporte $+ dx$, & vient $ac = bx - dx$. Je divise cette équation par $b - d$, & j'ay $x = \frac{ac}{b-d}$ laquelle équation se réduit en cette proportion $b-d. c :: a. x$, dont les trois premiers termes sont connus.

Probleme XIII.

86. *Mesurer une hauteur inaccessible* AB, *& sa distance* AC *par le moyen de deux bâtons* CD *&* EF.

Je suppose que $AC = x$, $AB = y$, $CE = b$, $GD = a$, & $FH = c$; alors puisque les triangles BAF & GDF sont semblables, $AB. GD :: FA. FG$; mais $FA. FG :: FI. FK$, à cause des paralleles GD, BA ; donc $AB. GD :: FI. FK$, ou leurs égales AE & CE, ainsi $y. a :: x + b. b$, par consequent $by = ax + ab$.

Les deux triangles *BHF* & *BGD* sont semblables; donc comme *BD* est à *BF*, ou *IK* à *IF*, ou *AC* à *AE*, de même



GD est à *HF*; ainsi $AC.\ AE :: GD.\ FH$, ou $x.\ x+b :: a.\ c$, partant $xc = ax + ab$; ôtant ax de part & d'autre, il reste $xc - ax = ab$, divisant l'un & l'autre membre par $c - a$, on a $x = \frac{ab}{c-a}$; ainsi $c - a a :: b.\ x$.

On connoît les trois premiers termes de cette proportion; donc x le quatriéme que l'on cherche sera aussi connu.

Puisque l'on a trouvé ci-dessus que $by = ax + ab$ & $xc = ax + ab$; il s'ensuit que $by = cx$, étant égaux à la même grandeur $ax + ab$, partant $b.\ c :: x.\ y$. Or x est déja connu : donc les trois premiers termes étant connus, on connoîtra le quatriéme terme y que l'on cherchoit.

PROBLEME XIV.

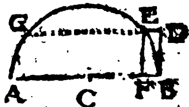
Deux Marchands ont mis en Societé 12 livres, & ont gagné 34 livres; le premier a pris 7 livres, tant pour mise que pour gain pour deux mois; le second a pris 39 livres, tant pour sa mise que pour son gain pour cinq mois. On demande la mise & le gain d'un chacun en particulier. 67.

La mise des deux, 12, $= a$. La mise du premier soit x; ainsi celle du second est $a - x$.

La mise & gain du premier est $7 = b$: donc $b - x$ sera le gain du premier.

La mise & gain du second est $39 = c$: donc $c - a + x$ sera le gain du second.

Or comme la mise du premier multipliée par son temps est à son gain ; ainsi la mise du second multipliée par son temps est à son gain ; c'est-à-dire, $2x . b - x :: 5a - 5x . c - a + x$. Le produit des extrêmes est égal à celui de ceux du milieu ; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$; & ajoûtant de part & d'autre $2ax$ & retranchant en même-temps $2xx$, on aura $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$; j'ajoûte de part & d'autre $3ax + 5bx$, ce qui me donne $2cx + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$. Je suppose que $d = 2c + 3a + 5b$; ainsi $dx = 5ab + 3xx$; je prens aussi $f = 5ab$, que je retranche de part & d'autre, & j'ay $dx - f = 3xx$. Ensuite pour réduire cette équation dans une formule qui me donne la résolution de la question, je suppose $d = 3g$ & $f = 3h$; ainsi $gx - h = xx$, je trouve un quarré égal à h, que je nomme ll, partant $gx - ll = xx$; laquelle équation se réduit à cette progression $\div g - x . l . x$, car $gx - xx = ll$, & par consequent $gx = ll + xx$, & $gx - ll, = xx$. Les extrêmes de cette progression sont $g - x$ & x, dont g est la somme. On trouvera leur difference si sur $AB = g$ ayant décrit le cercle AGB, on éleve perpendiculairement $BD = l$, & l'on tire de DG parallele à AB, & du point E la perpendiculaire EF qui coupera AB aux



point cherchez. Le grandeur inconnuë que l'on cherchoit est x. Or comme dans ce Problême on cherche la valeur de x en nombre, il faut du quarré de *CE* ou *CB*, moitié de *AB*, somme des extrêmes connus, ôter le quarré $FB = ll$ aussi connuë, il restera le quarré de *CF*, moitié de la difference des extrêmes, dont la racine ajoûtée à *CB* donnera le plus grand; & en étant ôté, le plus petit $x = 3$, mise au premier; après quoi tout le reste est facile.

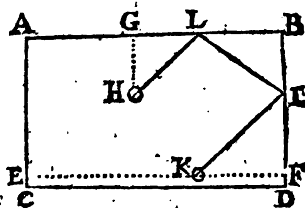
Avertissement.

On va voir dans les deux Problêmes suivans l'usage qu'on peut faire de la methode qu'on vient d'enseigner pour résoudre des Problêmes; qui sembleroient ne point appartenir à la Geometrie, dont cependant la résolution en dépend.

Probleme XV.

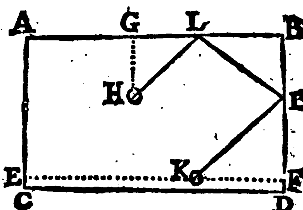
Soit le Billard ABCD. *Qu'il faille toucher la Bille* H *par deux bricoles, avec la Bille* K. 68.

L'angle incidence & de reflexion sont égaux; suivant ce principe, on suppose que *K* poussée au point *I* doit reflechir vers *L* & de *L* à *H*. C'est donc ce point *I* qu'on demande. Ayant mené par *K* la ligne *EF*, parallele au côté *CD*; & par l'autre point *H*, la



ligne *GH* parallele à *BD*. Soit $KF = a$, $FB = b$; $BG = d$, $GH = f$, & $FI = x$: donc $BI = b$

— x. Les triangles KFI & IBL étant semblables, x. a :: $b - x$. BL Donc $BL = \frac{ab - ax}{x}$, & en corrigeant



cette expression $BL = \frac{ab}{x} - a$. Or $GB - BL = GL$: ôtant donc $\frac{ab}{x} - a$ de d, on aura $GL = d + a - \frac{ab}{x}$.

Les triangles KFI & LGH sont semblables : donc a. x :: $d + a - \frac{ab}{x}$. f : donc $af = dx + ax - ab$: donc ajoûtant ab de part & d'autre & divisant par $d + a$, on aura $\frac{af + ab}{d + a} = x$; & remettant cette équation en proportion, on aura $d + a$. $f + b$ :: a. x, c'est à dire, que FI est une quatriéme proportionnelle à ces trois lignes $BG + KF$, $GH + FB$ & KF ; elles sont connuës : partant FI qu'on cherchoit le sera ; ainsi le point I.

Si on voit donc que la Bille K aille par deux bricoles toucher la Bille H, il faut fraper K de maniere qu'elle aille à I, d'où elle reflechira à L & de L à H ; ce qui étoit proposé.

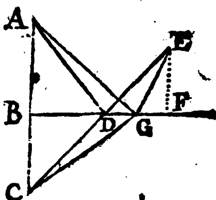
PROBLEME XVI.

19. *Deux points ou deux lieux étant donnez avec*

un plan éloigné de ces deux points; l'on demande un point sur ce plan, où il faut aller, pour arriver d'un lieu à l'autre par le chemin le plus court.

Ou ce qui revient au même :

Un objet lumineux étant donné avec un miroir; & un œil hors de ce miroir, trouver le point de reflexion.



Soient les points *A* & *E* donnez ; & soit aussi le plan *BF*. On demande sur ce plan le point *D* tel que la ligne *AD* plus *DE* soit la plus courte de toutes les autres menées de ce point à ce plan, par exemple plus courte que *AG* + *GE*.

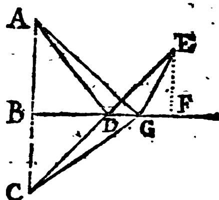
Premiere maniere.

Soit menée la perpendiculaire *AB* prolongée jusques en *C*, en sorte que *AB* = *BC*. Et soit du point *E* menée la ligne *CE*; je dis que le point *D* est celui qu'on cherche : car les deux triangles *ABD* & *DCB* sont égaux, aussi-bien que les deux *ABG* & *CBG* : donc *AD* + *DE* = *CD* + *DE*, & *AG* + *GE* = *CG* + *GE*. 701

Mais *CD* + *DE* est une ligne droite : donc elle est plus courte que *CG* + *GE*. Si le point *G* étoit entre *B* & *D*, ce seroit la même démonstration.

Remarquez que les deux triangles *ABD* & *CBD* étant égaux, ils sont semblables : donc les angles *ADB* & *BDC* sont égaux ; mais *EDF* est égal à *BDC* : donc *EDF* est égal

à *ADB* ; ainsi comme dans un miroir l'angle de reflexion est égal à celui d'incident, si l'objet est en *E*, & que le miroir soit *BF*, le point de reflexion sera *D* & la lumiere reflechira au point *A*. Ainsi la lumiere est portée par le plus court chemin.



Seconde maniere.

II. On suppose que l'angle d'incidence *EDF* est égal à *ADB*, celui de reflexion. Il s'agit de trouver le point *D* où tombera la lumiere qui reflechit de l'objet *E* à l'œil *A*, & va par le chemin le plus court. Les grandeurs connuës sont $AB = a$, $EF = b$, & $BF = d$. L'inconnuë est $BD = x$. Puisqu'on suppose que les angles d'incidence & de reflexion sont égaux, donc les deux triangles rectangles *ABD* & *EFD* sont semblables ; donc $a + b . a :: d . x$. Donc $\frac{ad}{a+b} = x$: ainsi la valeur de *BD* est connuë.

Fin des Elemens de Geometrie.



INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes Courbes que representent les differentes Sections du Cône. Leurs noms, & la methode la plus simple pour connoître leurs principales proprietez.



JE n'ai parlé dans ces Elemens de Geometrie, que de la Ligne Droite & du Cercle ; mais comme il y a d'autres lignes qu'on nomme des Lignes Courbes, qui sont maintenant l'objet principal des plus grands Geometres, à cause des proprietez singulieres & merveilleuses qu'ils y découvrent, il seroit à propos de donner leur génération avec quelques-unes de leurs principales proprietez. Je parlerai seulement des plus anciennes & des plus connuës, qui sont celles qu'on remarque en coupant le Cône de differentes ma-

nieres, & ausquelles on a donné le nom de *Sections Coniques*. Je déterminerai quelques-unes des principales proprietez de ces lignes. Voici comme elles s'engendrent dans le Cône.

Soit imaginé un Cône droit.

1°. Si on le coupe par un plan qui passe par son axe, il est clair que cette Section sera un triangle, dont les côtez seront les côtez mêmes du Cône, & la base le diamétre du cercle de la base du Cône.

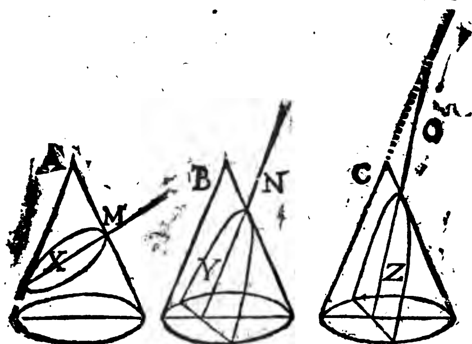
Je suppose dans la suite, que le plan coupant, de quelque maniere qu'il coupe le Cône, est perpendiculaire sur le plan de ce triangle.

2°. Si le plan coupant est parallele à la base du Cône, la Section est un cercle, comme il est évident.

3°. Si le plan coupant n'étant pas parallele à la base, rencontre l'axe du Cône, & ses deux côtez (je veux dire les deux côtez de ce triangle, qui est la Section du Cône par un plan qui passe par son axe) cette Section, ou le coutour de cette Section representera une ligne courbe, qu'on nomme *Ellipse* ou *Ovale*. Telle est la figure X, formée dans le Cône *A* par le plan coupant suivant la ligne *M*.

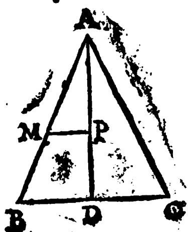
4°. Si le plan coupant ne coupe qu'un des côtez dudit triangle, & que la Section soit parallele à l'autre côté, cette Section ou le contour de cette Section sera une autre Courbe, qui s'appelle *Parabole*. Telle est la figurre Courbe Y, formée dans le Cône *B* par le plan qui le coupe, suivant la ligne *N*, parallele au côté.

5°. Si le plan coupant ne coupe qu'un seul côté, de maniere que ce plan prolongé puisse rencontrer l'autre côté dudit Cône ou Triangle



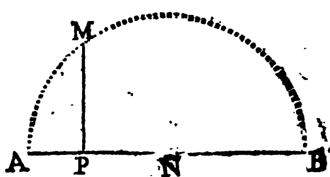
aussi prolongé au-dessus du sommet, cette Section ou le contour d'icelle est ce que l'on nomme *Hyperbole*. Telle est la figure Z formée dans le Cône C par le plan coupant, suivant la ligne O.

Comme il n'est pas nécessaire de s'imaginer un Cône pour expliquer la nature du cercle qui est une de ses Sections, on peut aussi découvrir les proprietez de toutes les lignes courbes que representent les Sections du Cône, sans être obligé de penser à ce solide. Or il y a de certains termes dont nous devons nous servir, en parlant de ces Sections qu'il faut expliquer.

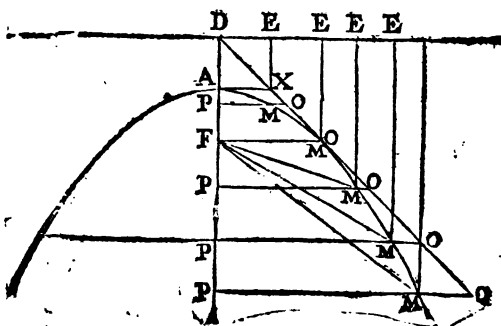


Soit le triangle *BAC*, qui est la Section du Cône par l'axe. Soit $AP = x$, $PM = y$, $AD = a$, $BD = b$. On aura par tout $x . y :: a . b$; donc $ay = bx$, qui est l'équation qui exprime la nature du triangle.

Soit *AMB* un demi cercle, dont *N* est le centre ; & *AN* + *NB* ou *AB* est le diametre. Soit *AP* = *x*, *PM* = *y*, *AB* = *a* ; ainsi *PB* = *a* — *x*. Partant ∺ *x*. *y*. *a*. — *x* ; ainsi *ax* — *xx* = *yy* est l'équation qui exprime la nature du cercle. Une perpendiculaire telle que *MP* menée d'un point quelconque *M* de la circonference sur le diametre *AB*, s'appelle *Ordonné* ; & la partie du diametre prise entre son extremité & la rencontre de l'Ordonnée, se nomme *Abscisse*.



Soit *DEE* une ligne droite donnée, avec *F* ; un point hors de cette ligne ; je nomme cette ligne *DEE* la Directrice. Soit *AMN* une courbe telle, que toute ligne perpendiculaire sur *DE* tombant sur *M*, un des points de la courbe, ait toûjours un même rapport avec une seconde li-



gne tirée du point *M* au point donné *F*. Cette ligne courbe est reguliere, & se peut décrire ; c'est-à-dire, qu'on peut trouver tous les points par lesquels elle doit passer. On donne ces noms à ses points, & à ses lignes.

Le point *A* est le *sommet* de la courbe. Le point *F* se nomme le *Foyer*. La ligne *AF* prolongée en est l'*Axe*. Les lignes qui coupent perpendiculairement cet Axe, & qui sont comprises entre la courbe & cet Axe, s'appellent les *Ordonnées*; *PM* est une *Ordonnée*. La partie de l'Axe prise du sommet *A* jusques à la rencontre d'une Ordonnée se nomme *Abscisse*. Ce qui fait la difference essentielle des trois Sections Coniques, la Parabole, l'Ellipse, & l'Hyperbole, c'est une raison qui est particuliere à la ligne *AD*, avec *AF*. Dans ces trois Sections, je nommerai ce rapport de *p* à *q*. Dans la Parabole, c'est toûjours une raison d'égalité ; à l'Ellipse, *p* est toûjours plus grand que *q*; Et dans l'Hyperbole, *p* est toûjours plus petit que *q*. A cela prés, la maniere de construire ces lignes est la même, & cette construction est aisée.

CHAPITRE II.

De la Parabole, ou Ligne Courbe que represente la Section d'un Cône droit, par un plan parallele à l'un de ses côtez.

DEFINITION PREMIERE.

La ligne droite DE *est donnée avec le point* F, *hors de cette ligne.* DE *est la directrice de la Courbe, dont on parle. La ligne* FD *est perpendiculaire sur cette directrice* DE. *Si cette*

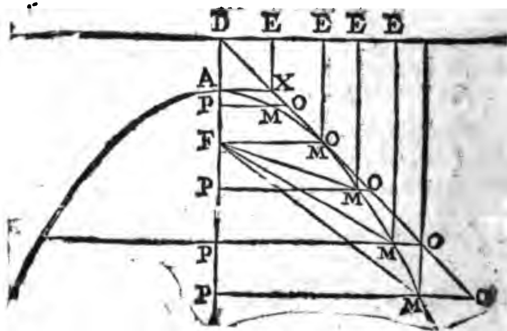
perpendiculaire est coupée au point A, *de sorte que* FA = AD; *& que de chaque point de la Courbe comme* M *ayant mené sur* DE *une perpendiculaire, & une autre ligne au point* F, *ces deux lignes soient égales, que* MF = ME, *soit nommée cette Courbe, Parabole.*

On démontrera que cette Courbe est la Section Conique qu'on appelle Parabole. J'exprimerai ce rapport d'égalité de *EM* à *MF*, par ces deux lettres *p* & *q*.

Probleme I.

Trouver chaque point de la Courbe, qu'on vient de définir.

DE est la ligne directrice qui est donnée, & *F* le Foyer. Il faut couper *DF* en deux parties égales, ainsi *A* est le sommet de la Courbe. Pour trouver les autres points; il faut 1°. Par *A* mener une parallele à *DE*, dans laquelle on prend *AX* égale à *FA*; & par *D* & par *X* on tire une ligne indefinie. 2°. Ayant ensuite mené tant de paralleles qu'on voudra à *DE*,



qui coupent l'Axe *DF* prolongé, on trouvera aisément les points de ces paralleles par lesquels passe la courbe ; par exemple le point M, dans a ligne *PO*. De l'intervalle de *PO* & du Foyer *F* comme centre, je fais un cercle qui coupera *PO* en *M* ; alors *AD*. *AX* :: *p*. *q* , & *AD*. *AX* :: *DP*. *PO*. Or *DP* = *ME* , & par la construction *PO* = *FM* : Donc * *ME*. *FM* :: *p*. *q*. Ainsi *M* est un des points de la parabole, selon la Définition précedente. *L. 3. 11. 5.

Remarquez que la ligne indéfinie *DX* fait avec *DF* un angle de 45 degrez ; car *DAX* est droit, & *AD* = *AX* : Donc ce triangle est isocelle ; ainsi l'angle *ADX* est égal à *AXD*. Par consequent chacun la moitié de l'angle droit ou de 45 degrez.

Definition II.

Une ligne toûjours double de FD, *ou quadruple de* FA, *ou de* AD *s'appelle le* Parametre de la Parabole.

Soit nommé *a* ce Parametre ; l'Ordonnée *PM* soit nommée *y*, & l'Abscisse *PA* soit nommée *x*. Il ne se faut mettre en peine, entendant parler de Parametre, d'autre chose de ce que dit la Definition, qu'on appelle ainsi, une *Ligne Quadruple* de *FA* ou de *AD*.

Remarque.

Comme cette Introduction suppose la connoissance de ces Elemens de Geomettie, on n'aura pas la même rigueur pour citer les propositions dont on tire les preuves, du moins dans les choses les plus faciles où l'esprit doit être versé.

Theoreme I.

Le rectangle fait du Parametre & de l'Abscisse

est égal au quarré de l'Ordonnée. Ou cette Ordonnée est une moyenne proportionnelle entre le Parametre & l'Abscisse.

FA ou *AD fig. preced.* soit nommé *b*. L'Abscisse *AP* a été nommée *x*. Donc *PD* ou *ME* $= b + x$, & $FP = x - b$ ou $b - x$, selon que le point *P* se trouve au-dessus ou au-dessous du Foyer *F*. Le Parametre *a* est Quadruple de *AD* ou de *AF*, & partant de *b*; ainsi $a = 4b$. Il faut démontrer que $\div a . y . x$; ou ce qui est la même chose que $ax = yy$*. Selon la premiere Définition $MF = EM$; mais $EM = PA + AD = b + x$. Donc $\overline{MF}^2 = bb + 2bx + xx$. Et puisque $FP = b - x$: donc $\overline{FP}^2 = bb - 2bx + xx$. Or $\overline{FM}^2 - \overline{FP}^2 = \overline{PM}^2 = yy$*. Donc $bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx = yy$. Mais $+ bb - bb = 0$, & $+ xx - xx = 0$; reste donc $2bx + 2bx$, ou $4bx = yy$. Or $4b$ est la valeur du Parametre *a*; partant $ax = yy$, ou $a . y :: y . x$; ce qu'il falloit prouver.

*L. 3. n. 18.

*L. 4. n. 48.

COROLLAIRE.

Dans la Parabole les quarrez des Ordonnées sont entr'eux, comme les parties de l'Axe prises entre son sommet & la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

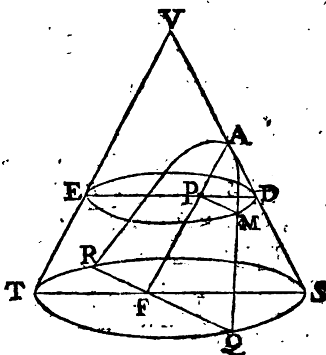
Le Parametre *a* est toûjours le même; mais *x* qui est l'Abscisse est plus petite ou plus grande, selon que l'Ordonnée est plus près ou plus éloigné du sommet *A*. Or puisqu'on a toûjours $yy = ax$, en quelque endroit que l'on prenne l'Ordonnée; donc les *yy* ou les quarrez des Ordonnées sont entr'eux comme les *x*, ou les Abscisses*.

*L. 3. n. 54.

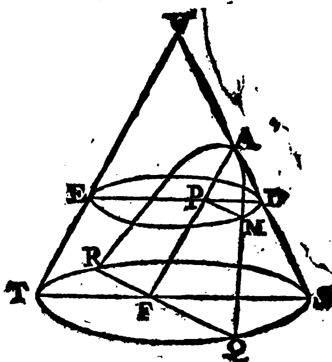
THEOREME II.

Cette Section Conique qu'on nomme Parabole *est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.*

SVT est un Cône droit coupé par un plan selon *AF* parallele au côté *TV*; il faut prouver que la Section *QAR*, qui est une Parabole, a les proprietez de la ligne courbe dont on vient de parler. Quelle que soit la ligne *QAR*, concevons que sur la ligne *AF*, les lignes *PM* & *QF* sont des perpendiculaires sur *AF*, que je nomme l'axe de cette Courbe, *PM* & *QF* en sont ainsi les Ordonnées, par consequent pour prouver que cette Parabole *QAR* est cette Courbe dont on vient de parler, il s'agit de prouver que les quarrés $\overline{MP}^2$ & $\overline{QF}^2$ & de toutes les autres Ordonnées, sont entr'eux comme les parties *AP*, *AF* de l'Axe qu'elles coupent; car cela étant il faut, selon le Corollaire précedent, que la Courbe *QAR* soit une telle ligne.



Concevons que le Cône droit *SVT* est coupé au point *M* par un plan parallele à sa base



Cette Section *PME* est donc un cercle. Soit *SQT* un autre cercle parallele à *DME*. La ligne *MP* est l'Ordonnée de la Parabole *QAR*, & du cercle *DME*, étant perpendiculaire tant sur *ED* que sur *AF*, d'autant qu'elle est la commune Section du plan du cercle & de celui de la Parabole, qui par la construction, coupe celui
* L. 5. n. 20. & 30. du triangle à angles droits*. Il en est de même de *QF*, qui est aussi Ordonnée, tant au cercle qu'à la Parabole. Or ∺ *DP. MP. PE**; & de
* L. 4. n. 29. même ∺ *SF. FQ. FT* : Donc $DP \times PE = \overline{MP}^2$, & $SF \times FT = \overline{FQ}^2$* : Donc $DP \times PE$.
* L. 3. n. 57. $SF \times FT :: \overline{MP}^2 . \overline{FQ}^2$; mais $PE = FT$* : Donc $\overline{PM}^2 . \overline{FQ}^2 :: DP . SF$*. Or à cause des
* L. 4. n. 8. triangles semblables *DPA* & *SFA*, *AP. AF* ::
* L. 4. n. 15. *DP. SF* : Donc $\overline{MP}^2 . \overline{FQ}^2 :: AP . AF$: Donc par le Corollaire précedent *QAR* est de la nature de cette ligne dont on a parlé dans ce Chapitre, qui est aussi la Section Conique qu'on appelle *Parabole*.

THEOREME II.

Une Parabole étant donnée, mener sur un point quelconque une ligne touchante en ce point.

Soit

Soit la demi-Parabole *AMB* ; on demande que du point *M*, l'on mene la touchante *MT*.

Soit menée du Foyer *F* au point *M* la ligne *FM*, & du point *M* la ligne *MP* parallele à l'Axe, & terminée par la directrice *DP*. Si l'on mene *FP*, & qu'on la divise en deux parties égales, la ligne *MT* menée par ce point de division sera la tangente que l'on demande ; ce qu'il faut prouver.

Le triangle *EMP* est isocelle par la génération ; donc *MT* est perpendiculaire sur *FP* *. * L. 1. n. 43.
Une ligne est touchante lorsqu'elle touche en un seul point ce qui arrive ici ; car toute autre point qu'on assigne en cette ligne *TS*, n'est pas dans la Parabole, mais hors d'icelle ; que par exemple *N* pris dans *TS* au-dessus ou au-dessous de *M*, n'est point dans la Parabole. Car soient menées les lignes *NF*, *NP*, & *NE* parallele à l'axe, *NP* sera toûjours plus grande que *NE* *. Or * L. 1. n. 51.
par la construction, puisque *TN* est perpendiculaire sur *FP*, les lignes *NF* & *NP* sont égales *. * L. 1. n. 42.

NF est donc plus grande que *NE*; par consequent *N* n'est pas un des points de la Parabole : car s'il l'étoit, *FN* seroit égale à *NE*, selon la Définition de la Parabole. Mais *FN* étant plus grande, ce point *N* sera hors d'icelle.

COROLLAIRE.

Il est évident que si la courbe *AMB* represente la Section d'un miroir Parabolique, & que *CM* soit un rayon incident parallele à l'Axe *AF*, la ligne *MF* representera le rayon reflechi; l'angle d'incidence *CMS* étant égal à *FMT*, l'angle de reflexion : car l'angle *CMS* est égal à l'angle opposé *TMP* *. Or par la construction *TMP* est égal à *TMF*; donc *TMF* est égal à *CMS*. Partant tous les rayons qui tomberont sur la surface concave de ce miroir parallelement à l'Axe, se réuniront au point *F*: & c'est ce qui le fait appeller *Foyer*. Ainsi pour faire un bon miroir ardent, il faut lui donner la figure d'un Conoïde parabolique creux.

* L. 1. p. 21.

CHAPITRE III.

De l'Ellipse ou de la ligne que represente la Section d'un Cône, par un plan, qui coupe ses deux côtez, & qui ne soit pas parallele à celui de la base.

DEFINITION PREMIERE.

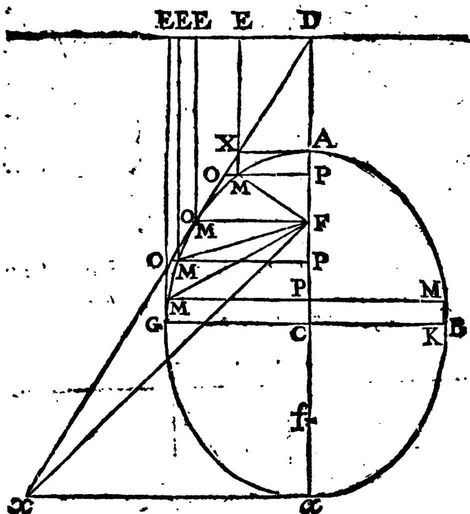
Soit donnée pour directrice de la ligne Courbe qu'on va définir, la ligne droite DE *avec un point,* F, *hors de* DE. FD *est perpendiculaire sur* DE. *Si cette perpendiculaire est coupée au*

point A, *selon la raison de* p *à* q, *je suppose que* p *est plus grand que* q ; *&* *que de chacun des points de la Courbe, comme de* M, *ayant mené une perpendiculaire sur* DE *&* *une autre ligne au point* F, *la ligne* EM *soit toujours à* FM *comme* p *à* q ; *cette ligne se doit nommer* Ellipse, *parce qu'on prouvera qu'elle est la même que celle de la Section du Cône qui a ce nom.*

PROBLEME I.

La directrice DE *étant donnée avec* F, *qui est un point hors d'elle, trouver tous les points de cette Courbe qu'on vient de définir.*

Il faut 1°. diviser *FD* en *A*, de sorte que *AD. FA* : : *p. q.*



2°. Il faut mener par *A* une parallele à la directrice *DE*, & prendre *AX* égale à *AF*. Ainsi *AD*. *AX* : : *p*. *q*.

3°. Il faut tirer par *D* & *X* une ligne indéfinie ; après quoi coupant l'axe par tant de paralleles qu'on voudra, il sera aisé de trouver dans ces paralleles le point par où passe la courbe. De *F* comme centre, & de l'intervalle *PO*, je fais un cercle qui coupe *PO* en *M*. A cause des triangles semblables *DAX* & *DPO*, la ligne *PD* ou son égale *EM*, est à *PO* ou *FM*, comme *AD* est à *AX* ; partant *EM*. *FM* : : *AD*. *AX* : : *p*. *q*. Le point *M* est donc un point de la courbe, qu'on vient de définir.

PROBLEME II.

Trouver l'Axe de cette Courbe.

La ligne *DX* soit prolongée à l'infini, & sur le prolongement de *AD* au point *F* soit menée une ligne qui fasse un angle de 45 degrez, & continuée jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne indéfinie *DX*.

Du point *x* où se fait cette rencontre, soit menée la perpendiculaire *xa* sur *Fa*. Donc dans le triangle *Fax*, l'angle *Fxa* est aussi de 45 degrez : donc le triangle *Fax*, est isocelle. Or *AD*. *AX* : : *Da*. *ax* * ; & puisque *Fax* est isocelle, *ax* = *Fa* : donc *AD*. *AX* : : *Da*. *Fa*. Mais *AD*. *AX* : : *p*. *q*. Donc *Da* : *Fa* : : *p*. *q*. Partant *a* est un des points de Courbe, comme il est évident.

* L. 4. n. 16.

DEFINITION II.

1°. A*a est le grand Axe de l'Ellipse. Le point* C *qui divise* Aa *par la moitié, est le centre. La ligne* BG *qui coupe à angles droits* Aa, *est le petit Axe. Ayant pris* fa *égale à* FA, *les points* F *&* f *sont les Foyers. Nous verrons pourquoi on leur donne ce nom.*

2°. *Les perpendiculaires menées d'un point quelconque de la Courbe à un des Axes, s'appellent* Ordonnées.

Ainsi *PM* étant une Ordonnée à l'Axe *Aa*; la ligne *AP* est une Abscisse.

3°. *La troisiéme proportionnelle aux deux Axes est appellée* Parametre du premier de la proportion.

Parametre, c'est un nom dont il suffit de concevoir ce qu'on met dans sa Définition.

THEOREME I.

L'intervalle Ff *des Foyers* F *&* f, *est au grand Axe* Aa, *comme* q *est à* p. *Fig. préced.*

On a démontré que $q. p :: AX. AD :: Fa. Da$: Donc $Fa - AX. Da - AD :: q. p.$ Or puisque $fa = FA = AX$: Donc $Fa - AX = Ff$. Mais $Da - AD = Aa$: Donc $Ff. Aa :: q. p$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME II.

AC *moitié du grand Axe* Aa, *est une moyenne proportionnelle entre* FC, *moitié de l'intervalle des Foyers, & la ligne* CD.

La moitié est à la moitié, *Fig. préced.* comme le tout est au tout; partant $AC. FC :: Aa. Ff$. Mais $Aa. Ff :: AD. AX$, par le Theorême précedent: donc $AC. FC :: AD. AX$; ou $FC. AC :: AX. AD$, & $FC. FC + AX :: AC. AC + AD$. Or par la construction $FA = AX$; ainsi $FC + AX = FC + FA = AC$, & $AC + AD = CD$. Mettant donc AC en la place de $FC + AX$, & CD en la place de $AC + CD$, viendra $FC. AC :: AC. CD$. Partant $\div FC. AC. CD$; ce qu'il falloit démontrer.

PREPARATION.

Pour les démonstrations des Theorêmes suivans, Même Figure.

Soit $AC = d$, & $CF = g$: donc FA ou $AX = d - g$, & Fa ou $ax = d + g$. Or AC ou d est moyenne proportionnelle entre CF ou g & CD par le Theorême préced. donc $\div g. d. CD$. Donc multipliant d par d, & divisant le pro-

duit dd par g, le quotient $\frac{dd}{g}$ sera égal à CD *. * L. 3. n. 60.

Soit $CP = x$, & $PM = y$: donc $PF = x - g$, ou $g - x$ & DP, ou $ME = \frac{dd}{g} - x$, lorsque le point P est au-dessus du centre C. Par la génération de l'Ellipse.

$$d . g :: \frac{dd}{g} - x . MF = d - \frac{gx}{d} *,$$ * L. 3. n. 60.

de laquelle proportion MF est le quatriéme terme. Lorsque le point P est au-dessous du centre C, alors $PF = x + g$ & DP, ou ME $= \frac{dd}{g} + x$ donc, comme dessus, $MF = d + \frac{gx}{d}$.

THEOREME III.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *au grand Axe* Aa, *est au rectangle* AP × Pa *parties de cet Axe, comme le rectangle* AF × Fa *aussi parties de cet Axe, est au quarré de* AC *ou* Ca *moitié de ce même Axe*, même Fig.

$AC = d$, $CF = g$, $PC = x$: donc $AP = d - x$ & $Pa = d + x$. Ainsi $AP \times Pa = dd - xx$. De même puisque $AF = d - g$, & $Fa = d + g$: donc $AF \times Fa = dd - gg$. Ainsi supposant $PM = y$; voilà ce qu'il faut démontrer.

$$yy . dd - xx :: dd - gg . dd.$$

Et pour cela que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, c'est-à-dire, $yydd = d^4 - ddxx - ddgg + ggxx$.

Le triangle FMP étant rectangle $\overline{FM}^2 - \overline{PF}^2$

$= \overline{PM}^2 = yy$. Or $FM = d - \frac{gx}{d}$; ainsi $\overline{FM}^2$ $= dd - 2gx + \frac{ggxx}{dd}$, & $PF = g - x$: donc $\overline{PF}^2 = gg - 2gx + xx$. Donc $\overline{PM}^2$, ou yy $= dd - 2gx + \frac{ggxx}{dd} - gg + 2gx - xx$. Or effaçant les termes qui se détruisent par $+$ & $-$, il viendra $yy = dd + \frac{ggxx}{dd} - gg - xx$; & multipliant tous ces termes de part & d'autre par dd, l'on aura $ddyy = d^4 + ggxx - ggdd - ddxx$; Donc, &c.

THEOREME IV.

Soit BC = b *le rectangle* AF × Fa, *ou* dd — gg *est égal à* bb *quarré de* BC *moitié du petit Axe* BG, *même Figure.*

Il faut prouver que $bb = dd - gg$. $BC = b$ est une Ordonnée qui se trouve au centre ; ainsi $x = o$, & $d - x = d$ & $y = b$; ainsi $yy = bb$. Or par le Theorême précedent $yy. dd - xx :: dd - gg. dd$. Donc mettant bb en la place de yy ; & effaçant $-xx$, on aura $bb. dd :: dd - gg. dd$; ou $bb. dd - gg :: dd. dd$; ainsi $bb = dd - gg$* ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME V.

Le quarré de MK *Ordonnée au petit Axe* BG *est au rectangle* BK × KG *parties de cet Axe, comme le quarré du grand axe* Aa *est au quarré du petit* BG. *même Fig.*

Le grand Axe Aa est égal à $AC + Ca$ ou à $2AC$; partant à $2d$. On a nommé b la moitié

du petit Axe BG ; ainsi $2b = BG$. On a déja nommé x la ligne CP. Or l'Ordonnée MK lui est égale, qui sera ainsi x. La ligne PM ordonnée au grand Axe a été nommée y. Ainsi CK, qui lui est égale, est aussi y ; partant $b - y = BK$ & $b + y = KG$, & $bb - yy = BK \times KG$*. *L. 3. n. 21.
Le quarré du grand Axe Aa ou $2d$, est $4dd$. Celui du petit Axe BG ou $2b$, est $4bb$. Voilà donc ce qu'il faut démontrer.

$$xx.\ bb - yy :: 4dd.\ 4bb.$$

Selon le troisiéme Theorême.

$$yy.\ dd - xx :: dd - gg.\ dd.$$

Par le quatriéme $bb = dd - gg$. Mettant donc bb en la place de $dd - gg$, vient

$$yy.\ dd - xx :: bb.\ dd.$$

Donc $yy.\ dd - xx :: 4bb.\ 4dd$* ; & multipliant les extrêmes & les moyens, l'on aura $4ddyy = 4bbdd - 4bbxx$, ou $4bbxx = 4bbdd - 4ddyy$; & remettant cette égalité en proportion, l'on aura enfin $xx.\ bb - yy :: 4dd.\ 4bb$*. *L. 3. n. 54. *L. 3. n. 58.

THEOREME VI.

Le Parametre est au diametre comme le quarré de son Ordonnée est au rectangle fait des parties de ce diametre prises depuis la rencontre de cette Ordonnée, même Figure.

AC moitié du grand diametre Aa a été nommé d ; & b celle du petit, BC. Ainsi $BG = 2b$. Soit le Parametre nommé a ; il faut, selon sa Définition, que $2d.\ 2b :: 2b.\ a$; Donc $\frac{4bb}{2d}$ ou $\frac{2bb}{d} = a$, & multipliant les deux membres de cette équation par d, viendra $2bb = ad$, &

divisant par 2, on aura $bb = \frac{1}{2} ad$. On a vû cy-dessus par les Theorêmes trois & quatre, que

$$yy. dd - xx :: bb. dd.$$

Mettant $\frac{1}{2} ad$ en la place de bb, on aura $yy. dd - xx :: \frac{1}{2} ad. dd$. Divisant chaque terme de la raison de $\frac{1}{2} ad$ à dd par d, vient $\frac{1}{2} a, d$; & les multipliant par 2 vient $a, 2d$; ainsi $yy. dd - xx :: a. 2d$, ou $a. 2d :: yy. dd - xx$, qui est ce qu'il falloit prouver.

Theoreme VII.

Les quarrez des Ordonnées sont entr'eux, comme les rectangles des parties de l'Axe faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnés.

y & m sont deux differentes Ordonnées, & n une autre partie que PC. Par le précedent Theorême.

$$yy. dd - xx.$$
$$a. 2d ::$$
$$mm. dd - nn.$$

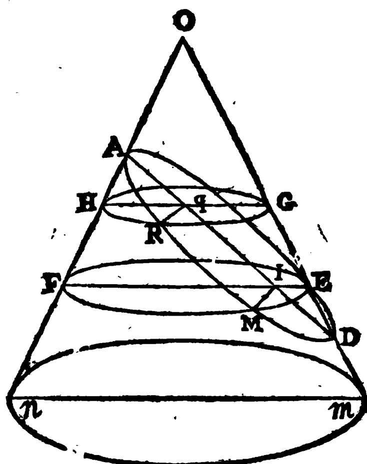
Donc $yy. mm :: dd - xx. dd - nn$; ce qu'il falloit prouver.

Theoreme VIII.

La Section Conique qu'on nomme Ellipse, *est la même Courbe que celle qu'on vient de définir & de décrire.*

Soit coupé le Cône mdn par un plan qui fasse un angle oblique avec son Axe, & qui coupe ses deux côtez. La Section $DMAD$, qui est

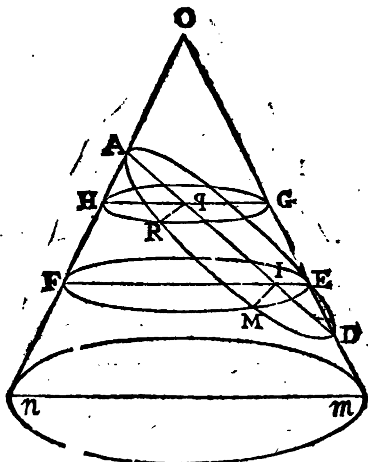
une Ellipse, sera la même ligne que celle dont on vient de montrer les proprietez.



Soient imaginez les deux cercles paralleles *EMF* & *GRH*, dont les diametres coupent celui de la courbe *DMAD*, quelle qu'elle soit, en *I* & en *q*. Si l'on mene des points *M* & *R*, où ces cercles coupent cette courbe, des lignes droites aux points *I* & *q*; il est évident que ces lignes seront des Ordonnées communes aux cercles & à la courbe *DMAD*, dautant que *R q* est perpendiculaire tant sur *HG* que sur *AD* *, étant la commune Section du plan du cercle & de l'Ellipse, qui par la construction coupent celui du triangle à angles droits. Il en est de même de *M I*. * *L. 5. n. 30. & 20.*

Les triangles *A q H.* & *A I F* sont semblables; donc *A q. F I* : : *Aq. A I.* Les triangles *DEI.*

& DGq ſont auſſi ſemblables ; donc $Gq. EI :: qD. ID$. Multipliant chaque terme de la premiere proportion par le terme qui lui ré-



pond dans la ſeconde, les produits ſeront en proportion étant composez de raiſons égales *;

* L. 3. n. 77.

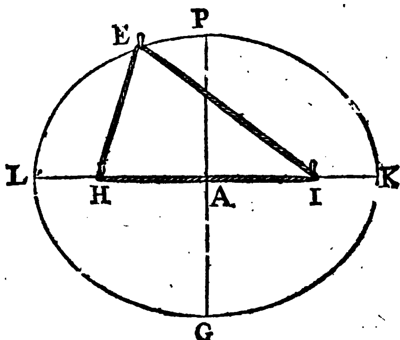
$$Hq. FI :: Aq. AI,$$
$$Gq. EI :: Dq. DI;$$

Ainſi $Hq \times Gq. FI \times FI :: Aq \times Dq. IA \times DI$, à cauſe des cercles FMF & GRH, ſelon les Elemens $\overline{qR}^2 = Hq \times qG$, & $\overline{IM}^2 = FI \times IE$: Donc $\overline{qR}^2. \overline{IM}^2 :: Aq \times Dq. AI \times ID$. Donc par le Theorême précedent cette Ellipſe $DAMD$ eſt la même que cette ligne dont nous avons démontré les proprietez, & qui par conſequent eſt cette Section Conique qu'on nomme l'*Ellipſe*.

PROBLEME III.

Décrire une Ellipse par un mouvement continu.

Soient donnez ces deux points *H* & *I* comme foyers d'une Ellipse, & la ligne *LK* comme le grand axe ou grand diametre. Pour décrire



cette ligne, l'on prendra un fil dont la longueur sera égale au grand diametre de l'Ellipse, & l'attachant fixe par ses extrêmitez aux deux points *H* & *I*, on conduira à la main une pointe mobile qui laisse une trace en tournant au tour de *H* & de *I*. Cette trace sera une Ellipse; ce qu'il faut démontrer.

Par la construction de cette courbe quelle qu'elle soit, les deux lignes *HE* & *EI* prises ensemble, sont égales au grand axe *KL*; ainsi il n'est question que de prouver que l'Ellipse dont nous avons parlé, a cette proprieté.

Soit une Ellipse Geometrique, dont *Aa* est le grand diametre, *F* & *f* sont les foyers. Il faut démontrer que $FM + Mf = Aa$.

Soit prolongé le diametre *Aa* de part & d'autre, de sorte que *AD*. *AF*, ou *AX* :: *p*. *q*, & de même *at*. *af* :: *p*. *q*, & qu'ainsi $at = AD$.

Soit menée par *t* une parallele à *DE*. Les rapports de *FM* à *PD* sont les mêmes que *fM* à *Pt*. Par la Définition.

$$\left.\begin{array}{l} FM.\ PD \\ fM.\ Pt \end{array}\right\} :: q.\ p :: AX.\ AD.$$

On a prouvé que *Ff*. *Aa* :: *AX*. *AD* *: * Theoreme 1.
Donc $Ff + 2AX$. $Aa + 2AD$ :: *AX*. *AD*.
Or $Ff + 2AX = Aa$, & $Aa + 2AD = Dt$.
Donc *Aa*. *Dt* :: *AX*. *AD*.

$FM + fM$. $PD + Pt$.
:: *AX*. *AD*.
Aa. *Dt*.

Donc $FM + fM$. $PD + Pt$ :: *Aa*. *Dt*.

Mais $PD + Pt = Dt$; donc $FM + fM = Aa$; ce qu'il falloit prouver.

REMARQUE.

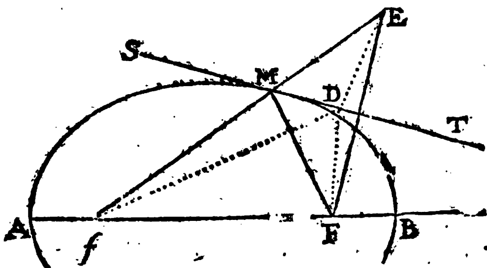
C'est de cette maniere que les Jardiniers tracent les Ellipses, aussi nommez pour cela, Ovale du Jardinier. *Et lorsqu'on a les deux diametres*

donnez se coupant à angles droits, il faut pour en en trouver les foyers H & I, Fig. de la p. 445. *de* P *ou de* G *extrémitez du petit Diametre, comme centres & intervalle* AL *ou* AK, *décrire une portion de cercle coupant* LK *en* H & I *qui soient lesdits foyers, comme il est évident par ce Problême.*

PROBLEME IV.

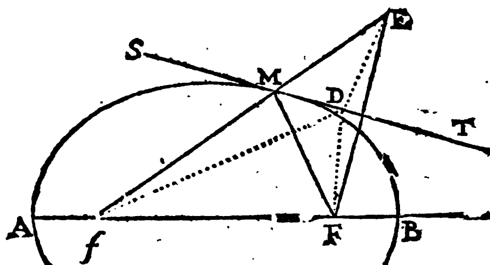
Une Ellipse étant donnée, mener d'un de ses points quelconque M *une tangente* MT.

Soient menées de ce point *M* aux deux foyers *F*, *f* les deux lignes *MF*, *Mf*; & soit prolongée *fM* jusques en *E*, en sorte que *ME* = *MF*. Soit menée la ligne *EF*. Si on divise cette ligne *EF* en deux parties égales par la ligne *MT*, je dis que *MT* sera une Touchante.



Soit pris sur cette Touchante un autre point *D*, d'où l'on menera les lignes *DE* & *DF* qui seront égales *, puisque *MT* est perpendiculaire sur *EF*; Il faut aussi du point *D* mener la ligne *Df*. Or *fD* + *DE* est plus grande que *fM* + *ME*; par conséquent plus que *fM* + *MF*: car par la construction *MF* = *ME*; donc ce

* L. 1. n. 58.



point *D* ne peut être un de ceux de l'Ellipse, qui a cette proprieté par le précedent Theorême, que si *D* étoit un de ces points $fD + DF = fM + MF$. La ligne *DT* ne rencontre donc l'Ellipse, qu'au point *M*.

Corollaire.

Il est évident que si AMB *represente la Section d'un Miroir Elliptyque, &* fM *soit un rayon incident, il se reflechira en* F.

Car l'angle d'incidence *fMS* est égal à l'angle de reflexion *FMT*; puisque l'angle *SMf* est égal à *EMT**, qui est égal à *TMF*. Ainsi tous les rayons qui partiront de *f*, & qui tomberont sur la surface concave de ce Miroir se réuniront au point *F*, & reciproquement s'ils partent du point *F*, ils se réuniront au point *f*: Et c'est pour cette raison qu'on appelle ces points *les Foyers*.

* L. 2. n. 21.



CHAPITRE IV.

De l'Hyperbole, ou de la ligne qui represente la Section d'un Cône coupé par un plan parallele à son axe, ou même de maniere que coupant un seul côté dudit Cône, il puisse aussi couper l'autre étant prolongé au-dessus de son sommet.

DE'FINITION I.

SOit DE *une ligne droite prise pour directrice*, & F *un point hors de cette ligne. La ligne* ED *est perpendiculaire sur* DE. *Si on di-*

vise FD *au point* A, *selon la raison de* p *à* q, *(on suppose ici que* p *est plus petit que* q*)* &

qu'on trace une courbe de laquelle ayant mené des perpendiculaires à DE *comme* EM, *& d'autres lignes à* F *comme* FM, *telles que* EM *soit à* MF *comme* p *à* q, *cette ligne se nomme* Hyperbole ; *parce que l'on démontre qu'elle a les mêmes proprietez que la Section Conique de ce nom.*

PROBLEME I.

Trouver tous les points par lesquels passe cette Courbe.

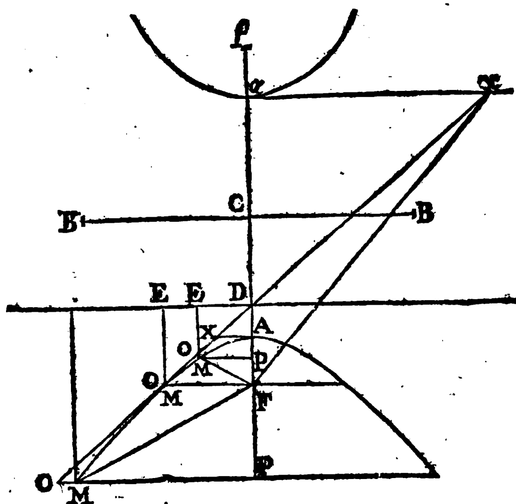
Je mene *AX* parallele à *DE*, & égale à *FA* ; & je tire une ligne indéfinie de part & d'autre par les points *D* & *X*. Après quoi menant librement tant de paralleles qu'on voudra à *DE*, comme *PO* ; pour trouver le point de cette ligne *PO* par où passe la Courbe, je fais un cercle de *F* comme centre, & de l'intervalle *PO*. Le point *M*, où ce cercle coupe *PO*, sera le point que l'on cherche ; car les triangles *DAX* & *DPO* étant semblables *PO*. *PD* :: *AX*. *AD* :: *q*. *p*. Or par la construction PO = *FM*. & *PD* = *EM* : Donc *FM*. *EM* :: *q*. *p*. Le point *M* est donc dans l'hyperbole par la Définition précedente.

PROBLEME II.

Trouver le sommet d'une semblable Courbe, qui lui soit opposée.

En considerant les proprietez de cette courbe, on peut la comparer avec une autre courbe opposée toute semblable, dont on trouve le sommet par cette pratique. On fait sur *FD* l'angle *DFx* de 45 degrez, & du point *x* où *Fx* coupe la ligne indéfinie *XD*, on mene une per-

pendiculaire sur *Ff*. Le point *a* sur lequel tombe cette perpendiculaire, sera un des points de



la Courbe; car *Fax* étant isocelle, *ax* = *aF*. Par la construction les triangles *xDa* & *ADX* sont semblables; donc *aD*. *ax* ou *aF* :: *DA*. *AX* ou *AF*. Ainsi *aD*. *aF* :: *DA*. *AF* :: *p*. *q*: Donc *aD*. *aF* :: *p*. *q*. Ainsi le point *a* sera celui d'une Courbe opposée & semblable, ayant pris *fa* = *FA*; pour avoir le Foyer *f*, selon la Définition suivante.

DEFINITION II.

La ligne Aa *s'appelle* Axe traversant *ou* Axe prolongé. *Le point* C *qui divise en deux l'Axe traversant, se nomme le* Centre.

Si l'on mene par C *une perpendiculaire* BB,

dont la grandeur est déterminée par un cercle décrit du point A *&* *de l'intervalle* C F, *cette ligne* BB *se nomme l'*Axe conjugué.

Les points F *&* f *sont les* Foyers.

Les perpendiculaires menées d'un des points des Courbes sur un des Axes, sont les Ordonnées.

Les Abscisses *sont les parties de ces Axes prises depuis leur origine jusqu'à la rencontre des Ordonnées.*

Quelquefois leur origine est au centre, & quelquefois au sommet des Hyperboles.

La troisiéme proportionnelle aux deux Axes est appellée Parametre du premier de la proportion.

THEOREME I.

L'Axe traversant Aa *est à* Ff, *intervalle des Foyers, comme* p *à* q.

Dax & *DAX* sont deux triangles semblables : *figure préced.* Donc *AX. ax* :: *AD. Da.* Or *AX* = *AF* & *ax* = *aF* : Donc *AF. aF* :: *AD. Da.* Donc *componendo* *AD* + *Da. AD* :: *AF* + *Fa. AF.* Mais *AF* + *Fa* = *Ff* : car *AF* = *af* & *AD* + *Da* = *Aa.* Donc *Aa. AD* :: *Ff. AF*; & *Aa. Ff* :: *AD. AF.* Or *AD. AF*, ou *AX* :: *p. q*; Donc *Aa. Ff* :: *p. q* : ce qu'il falloit prouver.

THEOREME II.

CD *est une troisiéme proportionnelle à* C A *&* C E. *figure précedente.*

Puisque les Touts sont aux Touts, comme les moitiez sont aux Moitiez, que *CF* est la moitié de *Ff*, & *CA* est la moitié de *Aa* :

donc *Ff. Aa* :: *CF. CA* :: *AX. AD* : donc *CF. CA* :: *CF — AX* ou *AF. Ca — AD*. Or *CF — AF* = *CA*, & *CA — AD* = *CD*. Donc *CF. CA* :: *CA. CD* ; ce qu'il falloit prouver.

THEOREME III.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *à l'axe* Aa *traversant, est au rectangle de* AP × Pa *parties de cet axe, comme le rectangle* AF × Fa *est au quarré de* CA *ou* Ca.

Soit $CA = d$, l'Ordonnée $PM = y$, $CP = x$, & $CF = g$; donc *figure préced.* lorsque *P* est au-dessous ou au-dessus du point *F*, $PF = x - g$, ou $g - x$. L'on aura donc $DP = x - \frac{dd}{g}$; car par le Theorême précedent $CD = \frac{dd}{g}$. Mais par la construction & par le Theorême premier $d. g :: x - \frac{dd}{g}. MF$: Donc $MF = \frac{gx}{d} - d$ *. Si le point *P* étoit au-dessus du point *a*, alors on trouveroit $MF = \frac{gx}{d} + d$. *L. 3. n. 60.

Il faut donc prouver que yy ou $\overline{PM}^2 . xx - dd$, ou $AP \times Pa :: gg - dd$, ou $AF \times Fa . dd$, ou $\overline{CA}^2$, ou $\overline{Ca}^2$; ce qui est facile : car à cause du triangle rectangle *MPF*, $\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{PF}^2$ * ; c'est-à-dire, en termes analytiques, $yy = \frac{ggxx}{dd} - xx - gg + dd$; ou en multipliant de part & d'autre par dd ; on aura $yydd = ggxx$ *L. 4. n. 78.

$-ddxx - ggdd + d^4$, & remettant les termes qui composent cette égalité en proportion, on trouvera $yy. xx - dd :: gg - dd. dd$; ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME IV.

Le quarré d'une Ordonnée quelconque PM *à l'axe* Aa *est au rectangle des parties de cet axe, sçavoir à* AP × Pa, *comme le quarré de l'axe conjugué* BB *est au quarré de l'autre axe* Aa. *Même figure.*

Concevons un triangle rectangle ABC, selon la Définition de l'axe conjugué $AB = FC$, on a supposé $FC = g$, & $AC = d$; supposons $BC = b$. Donc ABC étant rectangle, & $AB = g$;

* L. 4. n. 78. il faut que $bb = gg - dd$*. Or par le Theorême précedent $yy. xx - dd :: gg - dd$, où $bb. dd$.

* L. 3. n. 54. Multipliant bb & dd. par 4, ils demeurent en même raison*. Donc $yy. xx - dd :: 4bb. 4dd$. Or $AP \times Pa = xx - dd$. Donc le quarré de yy est au rectangle $AP \times Pa$, comme $4bb$, quarré de l'axe conjugué BB ou $2b$, est au quarré $4dd$ de l'autre axe Aa égal à $2d$.

THEOREME V.

Le Parametre est au diametre comme le quarré d'une Ordonnée quelconque, est au rectangle des parties de cet axe faites par la rencontre de cette Ordonnée.

Soit conservée la même dénomination des parties que ci-devant & même figure; & m soit le Parametre de l'axe Aa, lequel par sa Définition est une troisiéme proportionnelle aus-dits axes; ainsi $\div m. 2b. 2d$. Mais à cause de

* L. 3. n. 86. cette proportion on aura $m. 2d :: 4bb. 4dd$*. Or par le Theorême précedent, $4bb$ est à $4dd$ comme le quarré yy de l'Ordonnée est à $xx - dd$

rectangle des parties de l'axe ; donc $m. 2d :: yy. xx - dd$, ce qu'il falloit démontrer.

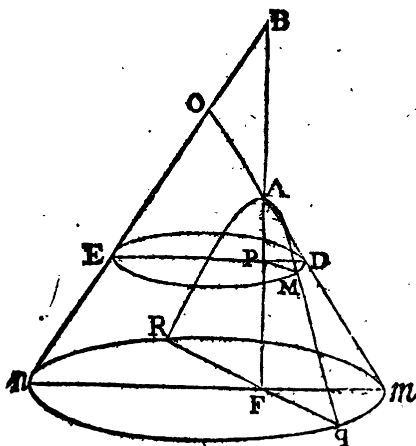
THEOREME VI.

Les quarrez des Ordonnées sont entr'eux comme les rectangles des parties de cet axe, faites par la rencontre de ces mêmes Ordonnées.

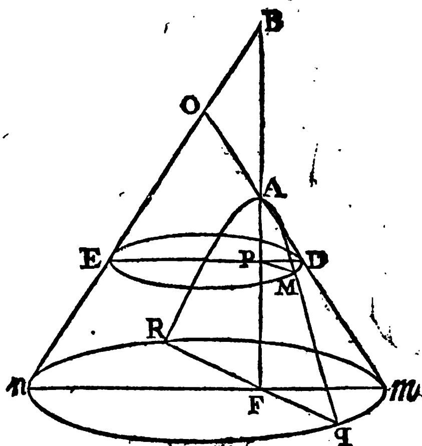
Ce qui est évident, puisque dans quelque endroit que se trouve le point *P*, le parametre *m* est au diametre $2d$, comme yy quarré de l'Ordonnée est au rectangle $xx - dd$, ou $AP \times Pa$ fait des parties de cet axe déterminées par l'Ordonnée.

THEOREME VII.

Cette Section Conique qu'on nomme Hyperbole, *est la même Courbe, que celle qu'on vient de décrire.*



Soit *m O n* un Cône coupé par un plan, qui



rencontre aussi en *B* l'autre côté *n* O du Cône, prolongé au-dessus du sommet O. Cette Section *q A R* sera la Courbe dont on vient de parler, où cette Courbe est veritablement cette Section du Cône qui s'appelle *Hyperbole*.

Soit imaginé un cercle *DME* parallele à *mqn*, celui de la base. Leurs diametres coupent l'axe de l'Hyperbole aux points *P* & *F*. Les lignes *MP* & *Fq* sont perpendiculaires sur ces diametres aussi-bien que sur l'axe *AF* *, dautant qu'elles sont les communes Sections de deux plans perpendiculaires à celui du triangle ; par consequent elles sont des Ordonnées tant du cercle que de la Courbe *DME*. Or $\overline{MP}^2 = DP \times PE$, & $\overline{Fq}^2 = mF \times nF$ *. Il faut démontrer que $\overline{MP}^2$, ou $DP \times PE$

* L. 5. n. 10. & 20.

* L. 4. n. 9.

$\times PE$ est à $\overline{Fq}^2$, ou à sa valeur $mF \times nF$, comme $AP \times PB$ est à $AF \times FB$.

Les deux triangles DAP & mAF sont semblables. Les deux triangles FBn, & PBE sont semblables. Donc

$$mF.\ DP :: FA.\ PA.$$

$$nF.\ PE :: FB.\ PB.$$

Multipliant chaque terme de la premiere proportion par le terme qui lui répond dans la seconde, les produits seront en proportion, étant des rectangles dont les raisons composées des côtez, sont semblables *.

$DP \times PE.\ mF \times nF :: AP \times PB.\ AF \times FB.$ *L. 3. n. 77.

Donc puisque $\overline{MP}^2 = DP \times PE$, & $\overline{Fq}^2 = mF \times nF$.

$\overline{MP}^2.\ \overline{Fq}^2 :: AP \times PB.\ AF \times FB$; ce qu'il falloit prouver.

Avertissement.

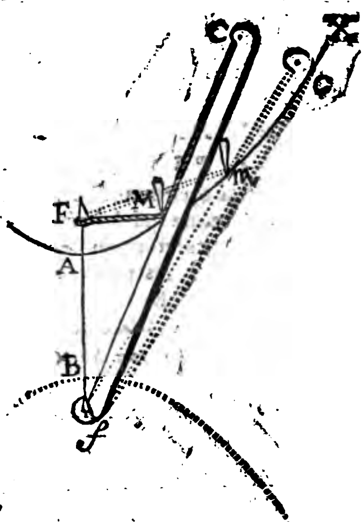
Si l'on prolonge le côté du Cône, ensorte que l'on imagine un autre Cône opposé par le sommet à celui-ci, il est clair que si l'on continuë le plan coupant, il formera dans cet autre Cône une Section semblable, qui sera l'Hyperbole opposée.

Probleme III.

Décrire l'Hyperbole par une mouvement continu.

Soit AMX une hyperbole, *figure suivante*. A est son sommet, & F son foyer. B est le sommet de son hyperbole opposée, qui a f pour foyer. On peut concevoir que cette hyperbole a été décrite, ou qu'elle le peut être de cette maniere.

La ligne *Cf* coupe l'hyperbole *AMX* au point M. Considerons cette ligne *Cf*, comme une regle au bout de laquelle est attachée une corde dont l'autre extrémité est attachée au foyer *F*.



Cette regle est fixe par son autre bout au foyer de l'hyperbole opposée, au tour duquel point *f* elle peut tourner.

Concevons cette regle dans une premiere situation, couchée sur *AB*, & la corde de telle longueur que *M* convient alors avec *A*. Mettons le doigt au point *A* ou *M*, & laissons-le couler vers *X* en faisant tourner la regle ; mais tenant toûjours la corde jointe & comme colée contre la regle. A mesure que la regle tournera, le doigt consideré comme une pointe, décrira l'hyperbole *AMX*.

COROLLAIRE I.

De cette construction il s'ensuit qu'ayant mené de chaque point de l'Hyperbole deux lignes.

droites aux deux foyers F *&* f, *la difference de ces deux lignes sera toûjours la même.*

Dans la premiere situation où *M* est sur *A*, la regle sur *AB* ou sur *Ff*; il est évident que la difference de *Mf* avec *MF*, c'est-à-dire, *Mf* — *MF* est *AB*, puisque *FA*=*fB*; cette difference est toûjours la même dans les autres situations. Car à mesure que la regle tourne, & que le doigt coule, la corde *MF* & la partie de la regle *Mf* s'alongent également. Ainsi ces deux grandeurs conservent une même difference.

COROLLAIRE II.

Une hyperbole se peut étendre ou être continuées à l'infini.

Car si on prolonge à l'infini la regle *Cf*, & en même tems la corde *MC* en faisant tourner la regle, & continuant de presser la corde comme ci-dessus, on prolongera l'hyperbole sans fin. Il est évident que le point *M* s'éloignera de plus en plus du foyer *F* à mesure que la regle *fC* tournera.

AVERTISSEMENT.

L'hyperbole étant prolongée & continuée à l'infini comme on vient de le dire, elle s'approche de plus en plus d'une certaine ligne droite, sans jamais la rencontrer; ce qui fait qu'on nomme cette ligne droite l'asymptote de l'hyperbole. Ce nom qui est grec, marque cette proprieté.

PROBLEME IV.

D'un point quelconque d'une Hyperbole, mener la touchante MT.

Soient *A* & *B* deux hyperboles opposées. On a mené du point donné *M* aux foyers *F* & *f* les lignes *MF*, *Mf*, & divisé l'angle *FMf* en

deux parties égales par la ligne *MT*; je dis que cette ligne est touchante ou tangente.

f
B
E
T
N
A
M
F
D
C

Soit pris *ME* égale à *MF*. Soient encore d'un point quelconque *D* dans la tangente *MT* menées les lignes *DF*, *Df* & *DE*. Les triangles *MFN* & *MEN* seront égaux; comme aussi *NDF* & *NDE*.

Il s'agit de prouver que le point *D* qui est dans la tangente *MT*, n'est point dans l'hyperbole; & qu'ainsi cette tangente ne la touche point, ou ne ne la rencontre point en *D*.

Si *D* étoit dans l'hyperbole *Df*—*DF*=*Mf*—*MF*, par le Corollaire précedent. Or cela n'est pas; car *ME* étant pris égale à *MF*: Donc

Mf — MF = Ef. Et puisque *DE* est égale à *DF* ; donc *Df = Ef + DF*. Mais dans le triangle *DEf*, les côtez *DE* & *Ef* pris ensemble, sont plus grands que le côté *Df* ; donc *DE* surpasse *DF* ; donc le point *D* n'est point un de ceux de l'hyperbole ; ce que l'on peut dire de tout autre point de la ligne *MT*, autre que *M* pris au dessus ou au dessous de *M* ; donc cette ligne *MT* ne rencontre l'hyperbole qu'en un point, donc elle est touchante.

COROLLAIRE.

Si la Courbe AM *represente la Section d'un Miroir Hyperbolique, & que* CM *soit un rayon incident qui tombe sur la surface concave de cè miroir au point* M, *partant de* C, *& tendant vers le foyer* f *de l'Hyperbole opposée, il se reflechira en* F.

L'angle *DMC* est égal à l'angle *EMN*, égal par la construction à *NMF* ; ainsi *DMC* est égal à *NMF*. L'angle d'incidence *CMD* étant donc égal à l'angle de reflexion *FMT*, le rayon *CM* reflechira en *F* au foyer de l'hyperbole. Ce que l'on doit entendre de tout autre rayon incident : Et c'est pour cela qu'on a nommé les points *F* & *f*, les Foyers.

CES *Courbes ont un grand nombre d'autres proprietez, que l'on peut voir dans l'Excellent Traité des Sections Coniques, de défunt Monsieur le Marquis de l'Hôpital.*

FIN.



TABLE

DES PROPOSITIONS

des Elemens d'Euclide, avec les lieux où elles se trouvent dans cet Ouvrage. Le premier chifre marque les Proposions d'Euclide. Le second qui est un chifre Romain indique le Livre de cet Ouvrage où elles se trouvent : Et le troisiéme, dans quel nombre de ce Livre. Les VII. VIII. & IX. Livres d'Euclide ne regardent que les nombres dont il ne s'agit pas dans la Geometrie. On ne les cite presque jamais, non plus que le X. Livre ; ainsi on n'a pas crû qu'il fût utile de rapporter les Propositions de ces Livres, comme on l'a dit ailleurs.

EUCLIDE LIVRE PREMIER.

DES ELEMENS D'EUCLIDE.

EUCLIDE LIVRE SECOND.

1	III.	17	6	III.	22	11	IV.	54
2	III.	18	7	III.	23	12	III.	27
3	III.	19	8	III.	24	13	III.	28
4	III.	20	9	III.	25	14	IV.	84
5	III.	21	10	III.	26			

EUCLIDE LIVRE TROISIE'ME.

1	I.	87	14	I.	94	27	II.	43
2	I.	83	15	I.	95	28	I.	32
3	I.	91			& 96	29	I.	32
		& 92	16	I.	106	30	I.	85
4	I.	93			& 109	31	II.	44
	II.	48		II.	32			45
5	I.	17	17	I.	113			& 46
6	I.	78	18	I.	106	32	II.	37
7	I.	102	19	I.	108	33	II.	49
8	I.	99	20	II.	41	34	II.	48
9	I.	102	21	II.	40	35	IV.	55
		& 104	22	II.	114	36	IV.	56
10	I.	89	23	I.	98	37	IV.	59
11	I.	81	24	I.	31			
12	I.	82	25	I.	80			
13	I.	80	26	II.	42			

EUCLIDE LIVRE QUATRIE'ME.

1	I.	30	7	II.	126	12	IV.	160
2	II.	100	8	II.	125	13	IV.	161
3	II.	101	9	II.	127	14	IV.	162
4	II.	102	10	IV.	149	15	IV.	143
5	II.	70			& 151	16	IV.	163
6	II.	124	11	IV.	158			

EUCLIDE LIVRE CINQUIE'ME.

1	III.	64	8	III.	91	15	III.	64
2	III.	65	9	III.	52	16	III.	46
3	III.	66	10	III.	92			& 56
4	III.	67	11	III.	53	17	III.	51
5	III.	68	12	III.	50			& 57
6	III.	69	13	III.	93	18	III.	49
7	III.	70	14	III.	94	19	III.	48

20	III.	95	22	III.	62	24	III.	63
21	III.	96	23	III.	88	25	III.	97

EVCLIDE LIVRE SIXIE'ME.

1	III.	99	13	IV.	29	24	IV.	51
2	IV.	16	14	IV.	82	25	IV.	86
3	IV.	17	15	IV.	83	26	IV.	52
4	IV.	10	16	III.	56	27	IV.	94
5	IV.	12	17	III.	57	28	IV.	95
6	IV.	13	18	IV.	26	29	IV.	96
7	IV.	14			& 85	30	IV.	34
8	IV.	27	19	IV.	71	31	IV.	79
9	IV.	22	20	IV.	90	32	IV.	15
10	IV.	20	21	IV.	11	33	IV.	46
11	IV.	23	22	IV.	74			
12	IV.	24	23	IV.	81			

EVCLIDE LIVRE ONZIE'ME.

1	V.	7	15	V.	37	29		
2	V.	8	16	V.	34	30	V.	109
3	V.	10	17	V.	38	31		
4	V.	19	18	V.	31	32	V.	121
5	V.	21	19	V.	30	33	V.	131
6	V.	29	20	V.	49	34	V.	136
7	V.	14	21	V.	51	35	V.	54
8	V.	29	22	V.	50	36	V.	138
9	V.	35	23	V.	52	37	V.	139
10	V.	36	24	V.	107	38	V.	25
11	V.	18	25	V.	108	39	V.	106
12	V.	22	26	V.	53	40	V.	114
13	V.	23	27	V.	103			
14	V.	33	28	V.	105			

EVCLIDE LIVRE DOVZIE'ME.

1	IV.	92	8	V.	133	14	V.	122
2	IV.	93	9	V.	137			& 130
3	V.	124	10	V.	128	15	V.	137
4	V.	125	11	V.	112	16	V.	146
5					& 130	17	V.	147
6	V.	123	12	V.	134	18	V.	143
7	V.	119	13	V.	113			

EUCLIDE LIVRE TREIZIE'ME.

1	IV.	66	9	IV.	154		&	154
2	IV.	68	10	IV.	164	16	V.	171
3	IV.	69	11	IV.	170		&	167
4	IV.	70	12	IV.	146	17	V.	161
5	IV.	35	13	V.	150		&	162
6	IV.	139		&	152	18	V.	173
7	IV.	168	14	V.	156			
8	IV.	169	15	V.	153			

EUCLIDE LIVRE QUATORZIE'ME.

1	V.	176	4	V.	174	7	V.	180
2	IV.	67	5	V.	178	8	V.	157
3	V.	172	6	V.	179			

EUCLIDE LIVRE QUINZIE'ME.

1	V.	181	3	V.	183	5	V.	185
2	V.	182	4	V.	184			

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre, à nos amez & feaux Conseilliers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, Salut. Notre bien amé DENIS MARIETTE Libraire à Paris; nous ayant fait rémontrer qu'il lui avoit été mis en main les *Elemens des Mathematiques, Elemens de Geometrie, & l'Art de parler; ou la Rhetorique du Pere* LAMY, qu'il souhaitteroit de faire imprimer & donner au Public, s'il nous plaisoit de lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce nécessaires: A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer lesdits Livres, en tels volumes, formes, marges, caracteres, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de dix années consecutives, à compter du jour de la datte desdites Présentes; faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression etrangere dans aucun lieu de notre obéïssance; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Livres en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque pretexte que ce soit d'augmentation, correction, changemens de titre, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de quinze-cent livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts, à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la datte d'icelle; que l'impression desdits Livres sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les exposer en vente, le manuscrit ou imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre sera mis dans le même état où l'Aprobation y aura été donnée ès mains de notre

très-chere & feal Chevalier Garde des Sceaux de France le sieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & feal Chevalier Chancelier de France le sieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE ; Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Présentes, du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoûtée comme à l'original : Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous Actes requis & nécessaires sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Paris le vingt-troisiéme jour du mois d'Août l'an de grace mil sept cent vingt-quatre ; & de notre Regne le neuviéme Par le Roy en son Conseil, Signé, CARPOT.

Registré sur le Registre VI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 55. fol. 48. conformement aux anciens Reglemens, confirmés par celui du 28 Fevrier 1723. A Paris le 29 Août, 1724.

BRUNET, Syndic.

De l'Imprimerie de G. F. QUILLAU, à l'Annonciation.